

GEMISCHTE BINOMKANTENIDEALE

An der Fakultät für Mathematik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science
angefertigte

Masterarbeit

vorgelegt von
NICLAS NIEDERDRENK
geboren am 15.11.1998 in Bergisch-Gladbach,
Studiengang Mathematik

20. Februar 2025

betreut am Institut für Algebra und Geometrie von
PROF. DR. THOMAS KAHLE

Für meine Eltern

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
Abbildungsverzeichnis	III
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	3
2.1 Notation	3
2.2 Gröbnerbasen	4
2.3 Binomideale	7
2.4 Saturierung von Binomidealen	9
2.5 Gitter und der Algorithmus von Pottier	11
2.6 Gitterideale	16
2.7 Graverbasis eines Binomideals	18
2.8 Halbgruppenringe	19
2.9 Torische Ideale	21
2.10 Radikalität von Gitteridealen	23
2.11 Lawrence-Ideale	24
2.12 Graphen	27
2.13 Summen von Primidealen	27
3 Gemischte Binomkantenideale	32
3.1 Definition	32
3.2 Elementare Eigenschaften	33
3.3 Kantenzüge	35
3.4 Gröbnerbasis	36
3.5 Reduzierte Gröbnerbasis	39
3.6 Graverbasis der Saturierung	45
3.7 Bipartite Graphen	47
3.8 Smith-Normalform	49

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	II
3.9 Minimale Primideale	51
4 Fazit	59
Literaturverzeichnis	60

Abbildungsverzeichnis

3.1	Ein Graph mit zwei verschiedenen Sorten Kanten.	33
3.2	Ein Graph mit einer Schleife.	35
3.3	Der Graph aus Beispiel 3.4.5.	37
3.4	Der Graph aus Beispiel 3.5.3.	40
3.5	Der Graph aus Beispiel 3.5.5.	40
3.6	Der Graph aus Beispiel 3.5.20.	44
3.7	Der Graph G aus Beispiel 3.6.6.	47
3.8	Die Graphen G und $\tilde{G}$ aus Beispiel 3.8.3.	50
3.9	Der Graph aus Beispiel 3.9.8.	52
3.10	Der Graph aus Beispiel 3.9.18.	54
3.11	Der Graph aus Beispiel 3.9.31.	58

Kapitel 1

Einleitung

Binomideale spielen eine zentrale Rolle in der kommutativen Algebra und werden sowohl aus algebraischer als auch aus kombinatorischer Perspektive untersucht. Sie finden Anwendung in verschiedenen Bereichen der Mathematik, etwa in der algebraischen Kombinatorik, der algebraischen Statistik oder der Theorie torischer Varietäten.

Eine besonders gut untersuchte Klasse von Binomidealen sind die *binomial edge ideals*, die 2009 eingeführt wurden. In den letzten Jahren sind zahlreiche Arbeiten zu ihrer algebraischen und kombinatorischen Struktur erschienen. Darüber hinaus haben sie Anwendungen in der algebraischen Statistik gefunden. Eine verwandte, aber anders aufgebaute Klasse sind die 2016 eingeführten *parity binomial edge ideals*. Sie teilen viele strukturelle Eigenschaften mit den binomial edge ideals, unterscheiden sich jedoch in der Art ihrer Erzeuger.

In dieser Arbeit werden beide Klassen durch die gemischten Binomkantenideale verallgemeinert. Diese Ideale enthalten sowohl die Erzeuger der binomial edge ideals als auch die der parity binomial edge ideals und kombinieren somit beide Strukturen. Die Idee für diese Ideale stammt aus einer nicht vollständig abgeschlossenen Forschungsarbeit von Dr. Philipp Korell, in der erste Konzepte skizziert wurden. Ziel dieser Arbeit ist es, eine systematische Untersuchung dieser Ideale vorzunehmen, ihre grundlegenden algebraischen Eigenschaften zu analysieren und ihre Beziehung zu klassischen Binomidealen zu klären.

Kapitel 2 fasst die algebraischen Grundlagen, die für die Untersuchung der gemischten Binomkantenideale benötigt werden, zusammen. Nach einer kurzen Einführung zur verwendeten Notation wird die Theorie der Gröbnerbasen und Binomideale behandelt, wobei auch die Saturierung von Binomidealen betrachtet wird. Ein zentraler Bestandteil ist die Verbindung zwischen

Gittern und Gitteridealen, insbesondere die Konstruktion der Graver-Basis eines Binomideals. Dazu wird der Algorithmus von Pottier eingeführt, mit dem die Graver-Basis eines Gitters und damit auch die eines Gitterideals berechnet werden kann.

Ein weiteres wichtiges Konzept sind torische Ideale. Das sind jene Binomideale, die Primideale sind. In diesem Zusammenhang wird ein Kriterium für die Radikalität von Gitteridealen hergeleitet und schließlich die Theorie der Lawrence-Ideale vorgestellt, die eine alternative Möglichkeit zur Berechnung einer Graverbasis von Gitteridealen bietet. Den Abschluss bildet die Betrachtung von Summen von Primidealen, da diese für die spätere Charakterisierung der minimalen Primideale des gemischten Binomkantenideals eine Rolle spielen.

In Kapitel 3 wird die entwickelte Theorie auf die gemischten Binomkantenideale angewendet und abschließend werden offene Fragen und mögliche Weiterentwicklungen diskutiert.

Kapitel 2

Grundlagen

*You probably think that one knows everything
about polynomials.*

(Serge Lang)

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für Kapitel 3 zusammengetragen. Zunächst wird in Abschnitt 2.2 der Begriff der Gröbnerbasis wiederholt. Anschließend bilden die Abschnitte 2.3 bis 2.11 eine ausführliche Einführung in die Theorie der Binomideale. In Abschnitt 2.12 wird ein Resultat über die Smith-Noormalform der Inzidenzmatrix eines Graphen zitiert. Abschließend werden in Abschnitt 2.13 Summen von Primidealen im Hinblick auf Abschnitt 3.9 untersucht.

2.1. Notation

Im Folgenden sei K ein Körper und $S = K[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring über K in n Variablen. Die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen. Sei $a \in \mathbb{N}^n$ ein Vektor mit n ganzzahligen nichtnegativen Einträgen. Dann schreiben wir abkürzend x^a für das Monom $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$. Wir bezeichnen mit $(f_1, \dots, f_s)$ das von den Polynomen $f_1, \dots, f_s \in S$ erzeugte Ideal.

Sei $<$ eine Monomordnung auf S . Sei $f = \sum_{a \in \mathbb{N}^n} c_a x^a$ ein von Null verschiedenes Polynom in S . Die endliche Menge von Monomen $\text{supp}(f) = \{x^a : c_a \neq 0\}$ ist der Träger von f . Wir schreiben $\text{LM}(f)$ für das *Leitmonom* von f bezüglich der Monomordnung $<$. Es gilt somit $\text{LM}(f) = \max \text{supp}(f)$. Die Zahl $\text{LC}(f) = c_{\text{LM}(f)}$ ist der *Leitkoeffizient*. Der *Leitterm* von f ist $\text{LT}(f) = \text{LC}(f) \text{LM}(f)$.

Der *Träger* eines Vektors $x \in \mathbb{Z}^n$ ist die Menge $\text{supp}(x) = \{i : x_i \neq 0\}$. Des Weiteren schreiben wir $|x|_1 = \sum x_i$.

Sei n eine positive ganze Zahl. Dann schreiben wir $[n] = \{1, \dots, n\}$.

Im Folgenden seien alle Ringe kommutativ mit 1. Seien A und B Ringe. Sei $\varphi: A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Für ein Ideal $I \subseteq A$ ist die *Extension* $I^e = IB = \langle \varphi(I) \rangle$ das von I erzeugte Ideal in dem Ring B . Für ein Ideal $J \subseteq B$ ist die *Kontraktion* $J^c = J \cap A = \varphi^{-1}(J)$ das Urbild von J unter φ .

2.2. Gröbnerbasen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Begriffe im Zusammenhang mit Gröbnerbasen wiederholt. Insbesondere wird Lemma 2.2.3 eine zentrale Rolle bei der Berechnung einer Gröbnerbasis der gemischten Binomkantenideale in Abschnitt 3.4 spielen. Die Darstellung orientiert sich an den Lehrbüchern [Cox et al., 1997] und [Ene and Herzog, 2011].

2.2.1. Definition. Seien $a, b \in \mathbb{N}^n$. Bezüglich der *lexikographischen* Monomordnung gilt genau dann $x^a > x^b$, wenn der am weitesten links stehende, von Null verschiedene Eintrag von $a - b$ positiv ist.

2.2.2. Definition. Seien f und g Polynome. Das *S-Polynom* von f und g ist das Polynom

$$S(f, g) = \frac{\text{lcm}(\text{LM}(f), \text{LM}(g))}{\text{LT}(f)} f - \frac{\text{lcm}(\text{LM}(f), \text{LM}(g))}{\text{LT}(g)} g.$$

Es gilt $S(f, g) = -S(g, f)$ und $\text{LM}(S(f, g)) < \text{lcm}(\text{LM}(f), \text{LM}(g))$.

2.2.3. Lemma. Seien f und g Polynome und seien u und v Monome. Dann gilt die Gleichung $S(uf, vg) = wS(f, g)$ mit dem Monom

$$w = \frac{\text{lcm}(u \text{LM}(f), v \text{LM}(g))}{\text{lcm}(\text{LM}(f), \text{LM}(g))}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit seien alle Leitkoeffizienten gleich 1. Seien $m = \text{LM}(f)$ und $n = \text{LM}(g)$. Es gilt

$$\begin{aligned} S(uf, vg) &= \frac{\text{lcm}(um, vn)}{um} uf - \frac{\text{lcm}(um, vn)}{vn} vg \\ &= \frac{\text{lcm}(um, vn)}{\text{lcm}(m, n)} \left(\frac{\text{lcm}(m, n)}{m} f - \frac{\text{lcm}(m, n)}{n} g \right) \\ &= wS(f, g). \end{aligned}$$

Für alle nichtnegativen Zahlen a, b, c, d gilt die Ungleichung $\max(a+c, b+d) \geq \max(c, d)$. Deshalb ist w ein Monom. ■

2.2.4. Definition. Sei $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ eine Menge von Polynomen. Ein Polynom f reduziert sich zu 0 modulo G , falls es Polynome $h_1, \dots, h_s$ gibt mit

$$(2.2.5) \quad f = h_1 g_1 + \dots + h_s g_s \text{ und } \text{LM}(f) \geq \text{LM}(h_i g_i)$$

für alle $i \in \{1, \dots, s\}$ mit $h_i g_i \neq 0$. In diesem Fall schreiben wir $f \rightarrow_G 0$. Eine Darstellung der Form (2.2.5) heißt *Standarddarstellung*.

2.2.6. Bemerkung. Für jede Summe von Polynomen $0 \neq f = \sum f_i$ gilt wegen der Inklusion $\text{supp}(f) \subseteq \bigcup \text{supp}(f_i)$ stets die Ungleichung

$$\text{LM}(f) \leq \max\{\text{LM}(f_i) : f_i \neq 0\}.$$

Deshalb gilt für eine Standarddarstellung $f = \sum h_i g_i$ sogar die Gleichung $\text{LM}(f) = \max\{\text{LM}(h_i g_i) : h_i g_i \neq 0\}$. Insbesondere gilt in diesem Fall die Relation $\text{LM}(g_i) \mid \text{LM}(f)$ für ein i . ■

2.2.7. Lemma. Seien f und g Polynome mit teilerfremden Leitmonomen. Dann reduziert sich das S -Polynom $S(f, g)$ zu 0 modulo $\{f, g\}$. Es gilt daher $S(f, g) \rightarrow_{\{f, g\}} 0$.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\text{LC}(f) = \text{LC}(g) = 1$. Seien $p = f - \text{LM}(f)$ und $q = g - \text{LM}(g)$. Es gilt

$$S(f, g) = \text{LM}(g)f - \text{LM}(f)g = (g - q)f - (f - p)g = pg - qf.$$

Angenommen, es gilt $\text{LM}(p)\text{LM}(g) = \text{LM}(q)\text{LM}(f)$. Dann folgt $\text{LM}(g) \mid \text{LM}(q)$ wegen der Teilerfremdheit $\text{LM}(f)$ und $\text{LM}(g)$. Daraus folgt aber die Ungleichung $\text{LM}(g) \leq \text{LM}(q)$ im Widerspruch zur Definition von q . Die Leitmonome von pg und qf sind also verschieden. Es gilt daher $\text{LM}(S(f, g)) = \max\{\text{LM}(pg), \text{LM}(qf)\}$. ■

2.2.8. Lemma. Seien f und g Polynome mit teilerfremden Leitmonomen und seien u und v Monome. Dann gilt $S(uf, vg) \rightarrow_{\{wf, wg\}} 0$, wobei das Monom w wie in Lemma 2.2.3 definiert ist.

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 2.2.7 und Lemma 2.2.3. ■

Seien f und g Polynome mit teilerfremden Leitmonomen und seien u und v Monome. Im Allgemeinen gilt $S(uf, vg) \not\rightarrow_{\{uf, vg\}} 0$, wie das folgende Beispiel zeigt.

2.2.9. Beispiel. Wir betrachten den Polynomring $K[x, y, z, w]$ mit der lexikographischen Monomordnung, die die Ungleichungen $x > y > z > w$ erfüllt. Seien $f = x - y$ und $g = z - w$. Die Binome f und g haben teilerfremde Leitmonome. Der Beweis von Lemma 2.2.7 liefert die Standarddarstellung $S(f, g) = xw - yz = w(x - y) - y(z - w)$. Aus Lemma 2.2.3 folgt die Gleichung $S(zf, xg) = xw - yz$, denn es gilt

$$\frac{\text{lcm}(z \text{ LM}(f), x \text{ LM}(g))}{\text{lcm}(\text{LM}(f), \text{LM}(g))} = \frac{\text{lcm}(zx, xz)}{xz} = 1.$$

Das Polynom $S(zf, xg)$ reduziert sich nicht zu 0 modulo zf und xg , denn das Monom $\text{LM}(zf) = \text{LM}(xg) = xz$ teilt nicht das Monom xw . ■

2.2.10. Definition. Sei $I \subseteq S$ ein Ideal. Das *Initialideal* von I ist das Monomideal $\text{LM}(I) = (\text{LM}(f) : f \in I \setminus \{0\})$.

2.2.11. Definition. Sei $I \subseteq S$ ein Ideal. Eine Menge von Polynomen $g_1, \dots, g_s \in I$ mit $\text{LM}(I) = (\text{LM}(g_1), \dots, \text{LM}(g_s))$ heißt *Gröbnerbasis* von I .

2.2.12. Algorithmus von Buchberger. Sei $I = (f_1, \dots, f_m) \subseteq S$ ein Ideal. Mit dem Algorithmus von Buchberger aus Theorem 2, Abschnitt 2.7 in dem Lehrbuch [Cox et al., 1997] kann eine Gröbnerbasis von I berechnet werden. Der Algorithmus verwendet den multivariaten Divisionsalgorithmus, definiert in Theorem 3, Abschnitt 2.3 von [Cox et al., 1997]. Im Folgenden beziehen sich alle Verweise auf diese Versionen der Algorithmen.

2.2.13. Buchbergers Kriterium. Sei $I \subseteq S$ ein von der endlichen Menge $G \subseteq I$ erzeugtes Ideal. Die Menge G ist genau dann eine Gröbnerbasis von I , falls $S(g, h) \rightarrow_G 0$ für alle $g, h \in G$ gilt.

Beweis. Theorem 3, Abschnitt 2.9 in [Cox et al., 1997]. ■

2.2.14. Definition. Sei $I \subseteq S$ ein Ideal. Eine Gröbnerbasis G von I heißt *reduziert*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Es gilt $\text{LC}(g) = 1$ für alle $g \in G$;
- (ii) Für alle $g, h \in G$, $g \neq h$ und $u \in \text{supp}(g)$ gilt $\text{LM}(h) \nmid u$.

2.2.15. Lemma. Sei $I \subseteq S$ ein Ideal und $I_t = I \cap K[x_{t+1}, \dots, x_n]$. Sei G eine Gröbnerbasis von I bezüglich der lexikographischen Monomordnung. Dann ist die Menge $G \cap K[x_{t+1}, \dots, x_n]$ eine Gröbnerbasis von I_t bezüglich der induzierten lexikographischen Monomordnungen auf dem Unterring $K[x_{t+1}, \dots, x_n]$.

Beweis. Sei $G = \{g_1, \dots, g_t, g_{t+1}, \dots, g_s\}$ eine Gröbnerbasis des Ideals I mit $g_1, \dots, g_t \in I_t$ und $g_{t+1}, \dots, g_s \notin I_t$. Insbesondere folgt für die lexikographische Monomordnung $\text{LM}(g_{t+1}), \dots, \text{LM}(g_s) \notin K[x_{t+1}, \dots, x_n]$. Daraus kann die Gleichung $(\text{LM}(g_1), \dots, \text{LM}(g_s)) = \text{LM}(I_t)$ geschlussfolgert werden. Insbesondere ist $\{g_1, \dots, g_t\}$ eine Gröbnerbasis von I_t . ■

2.3. Binomideale

In diesem Abschnitt wird der Begriff des Binomideals eingeführt. Er basiert auf der Darstellung in Kapitel 3 von [Herzog et al., 2018] sowie in Kapitel 5 von [Ene and Herzog, 2011]. In dieser Arbeit ist ein Binom die Differenz zweier Monome, was in der Literatur auch als *pure difference binomial* bezeichnet wird. Ein Binomideal ist demnach ein Ideal, das von solchen Binomen erzeugt wird. Die Hauptaussage des Abschnitts bildet Proposition 2.3.9, die ein Kriterium dafür liefert, wann ein Binom in gewissen Binomidealen enthalten ist.

2.3.1. Definition. Ein *Binom* ist die Differenz von zwei Monomen. Ein *Binomideal* ist ein Ideal, das von Binomen erzeugt wird.

Ein Binom $f \in S$ hat die Form $f = x^a - x^b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{N}^n$. Sei $I \subseteq S$ ein Binomideal. Dann gilt $f(1, \dots, 1) = 0$ für alle Polynome $f \in I$. Ein Binomideal enthält also insbesondere keine Monome.

2.3.2. Proposition. Sei $B \subseteq S$ eine Menge von Binomen und sei I das von B erzeugte Ideal. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $B' \subseteq B$ mit $I = (B')$.

Beweis. Da der Ring S noethersch ist, gibt es eine endliche Menge von Erzeugern des Ideals I . Jedes Element in dieser Menge ist eine endliche polynomielle Linearkombination von Binomen in B . Die endlich vielen Binome, die dabei auftreten, erzeugen das Ideal I . ■

2.3.3. Satz. Die reduzierte Gröbnerbasis von Binomidealen besteht aus Binomen.

Beweis. Seien $f_1, \dots, f_s$ Binome mit $I = (f_1, \dots, f_m)$. Das S -Polynom $S(f, g)$ zweier Binomen f und g ist ein Binom. Der Divisionsalgorithmus 2.2.12 liefert daher eine Darstellung $S(f, g) = h_1 f_1 + \dots + h_s f_m + r$, wobei $r = 0$ gilt oder r ein Binom ist. Der Algorithmus von Buchberger 2.2.12 liefert also eine aus Binomen bestehende Gröbnerbasis von I . Aus dieser Gröbnerbasis können wir eine minimale Gröbnerbasis $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ auswählen. Schließlich erhalten wir durch Anwendung des in Theorem 5, Abschnitt 2.7

von [Cox et al., 1997] beschriebenen Verfahrens eine aus Binomen bestehende reduzierte Gröbnerbasis von I . ■

2.3.4. Notation für Binome. Für einen ganzzahligen Vektor $a \in \mathbb{Z}^n$ definieren wir die Vektoren a^+ und a^- durch die Gleichungen $a_i^+ = \max(a_i, 0)$ und $a_i^- = -\min(0, a_i)$. Die Vektoren $a^+, a^- \in \mathbb{N}^n$ haben disjunkten Träger und erfüllen die Gleichung $a = a^+ - a^-$. Umgekehrt folgt aus $a = b + c$ für Vektoren $b, c \in \mathbb{N}^n$ mit disjunktem Träger bereits $b = a^+$ und $c = a^-$. Für einen ganzzahligen Vektor $a \in \mathbb{Z}^n$ definieren wir das Binom $f_a = x^{a^+} - x^{a^-}$.

2.3.5. Bemerkung. Seien $a, b \in \mathbb{N}^n$. Wir betrachten das Binom $x^a - x^b$. Sei der Vektor $c \in \mathbb{N}^n$ definiert durch $c_i = \min(a_i, b_i)$. Dann gilt die Gleichung

$$x^a - x^b = x^c(x^{a'} - x^{b'})$$

mit $a' = a - c \in \mathbb{N}^n$ und $b' = b - c \in \mathbb{N}^n$. Insbesondere gilt $a - b = a' - b'$. Die Vektoren a' und b' haben disjunkten Träger. Es folgt $(a - b)^+ = a'$ und $(a - b)^- = b'$ und damit die Gleichung $x^a - x^b = x^c f_{a-b}$. Falls $a, b \in \mathbb{Z}^n$ gilt, bleibt die Rechnung ebenfalls gültig. Der einzige Unterschied besteht darin, dass der Vektor c im Allgemeinen in $\mathbb{Z}^n$ anstelle von $\mathbb{N}^n$ liegt.

2.3.6. Lemma. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt $f_a f_b + x^{a^-} f_b + x^{b^-} f_a = u f_{a+b}$ für ein Monom u .

Beweis. Es gilt $f_a f_b + x^{a^-} f_b + x^{b^-} f_a = x^{a^+ + b^+} - x^{a^- + b^-} = u f_{a+b}$ für ein Monom u , denn es gilt $a^+ + b^+ - (a^- + b^-) = a + b$. ■

2.3.7. Lemma. Sei $I \subseteq S$ ein von den Binomen $f_1, \dots, f_m$ erzeugtes Binomideal. Dann hat jedes Binom $f \in I$ die Form $f = \sum_{i=1}^m g_i f_i$ für gewisse Polynome $g_1, \dots, g_m$ mit ganzzahligen Koeffizienten.

Beweis. Durch Anwenden von Buchbergers Algorithmus 2.2.12 auf die Binome $(f_1, \dots, f_m)$ erhalten wir eine (nicht notwendigerweise reduzierte) Gröbnerbasis G . Die Menge G besteht aus Binomen und es gilt $\{f_1, \dots, f_m\} \subseteq G$. Der Divisionsalgorithmus liefert eine Darstellung von f als Linearkombination von Elementen in G mit ganzzahligen Polynomen als Koeffizienten. Da wiederum jedes Element in G eine solche Linearkombination der Binome $f_1, \dots, f_m$ ist, folgt die Aussage. ■

2.3.8. Notation für Binomideale. Sei $C \subseteq \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ eine Menge von ganzzahligen Vektoren. Wir betrachten das Binomideal $I_C = (f_a : a \in C)$. Sei $G = G(C)$ der Graph mit Knotenmenge $\mathbb{N}^n$ und Kantenmenge

$$E(G) = \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{N}^n, a - b \in \pm C\}.$$

Die folgende Proposition liefert ein nützliches Kriterium dafür, wann ein Binom in dem Ideal I_C enthalten ist.

2.3.9. Proposition. *Seien $a, b \in \mathbb{N}^n$ und $C \subseteq \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) $x^a - x^b \in I_C$;
- (ii) Die Vektoren a und b liegen in derselben Zusammenhangskomponente des Graphen G_C ;
- (iii) Es gibt Vektoren $c_1, \dots, c_l \in \pm C$ mit $a + c_1 + \dots + c_l = b$, sodass für alle $i = 1, \dots, l$ die Eigenschaft $a + c_1 + \dots + c_i \in \mathbb{N}^n$ gilt.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Aus Lemma 2.3.7 folgt $x^a - x^b = x^{d_1} f_{c_1} + \dots + x^{d_l} f_{c_l}$ für gewisse $c_1, \dots, c_l \in \pm C$ und $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{N}^n$. Sei $l = 1$. Dann gilt $x^a - x^b = x^{d_1+c_1^+} - x^{d_1+c_1^-}$ und damit $a = d_1 + c_1^+$ und $b = d_1 + c_1^-$. Es folgt $a - b = c_1$ und damit $\{a, b\} \in E(G_C)$. Sei $l > 1$. Wir können $x^a = x^{d_1+c_1^+}$ annehmen. Es gilt also $\{a, d_1 + c_1^-\} \in E(G_C)$. Durch Subtrahieren von $x^{d_1} f_{c_1}$ auf beiden Seiten der obigen Gleichung folgt $x^{d_1+c_1^-} - x^b = x^{d_2} f_{c_2} + \dots + x^{d_l} f_{c_l}$. Per Induktion folgt, dass die Knoten $d_1 + c_1^-$ und b in derselben Zusammenhangskomponente des Graphen G_C liegen und damit die Aussage.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Angenommen, die Vektoren a und b liegen in derselben Zusammenhangskomponente des Graphen G_C . Dann gibt es in G_C einen Kantenzug $(v_0, v_1, \dots, v_l)$ mit $v_0 = a$, $v_l = b$ und $\{v_{i-1}, v_i\} \in E(G_C)$ für alle $i = 1, \dots, l$. Insbesondere gibt es Vektoren $c_i \in \pm C$ mit $v_{i-1} + c_i = v_i$ für alle $i = 1, \dots, l$. Es folgt $v_0 + c_1 + \dots + c_i = v_i$ für alle $i = 1, \dots, l$ und damit die Aussage.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $v_0 = a$ und $v_i = a + c_1 + \dots + c_i \in \mathbb{N}^n$ für alle $i = 1, \dots, l$ und $v_l = b$. Es gilt also $c_i = v_i - v_{i-1}$ für alle $i = 1, \dots, l$. Es folgt

$$\begin{aligned} x^b - x^a &= x^{v_l} - x^{v_{l-1}} + x^{v_{l-1}} - x^{v_{l-2}} + \dots + x^{v_1} - x^{v_0} \\ &= u_l f_{c_l} + u_{l-1} f_{c_{l-1}} + \dots + u_1 f_{c_1} \end{aligned}$$

für gewisse Monome $u_1, \dots, u_l$ und damit $x^a - x^b \in I_C$. ■

2.4. Saturierung von Binomidealen

Das Hauptresultat dieses Abschnitts besagt, dass die Saturierung $I : x^\infty$ eines Binomideals $I \subseteq S$ bezüglich des Produkts der Variablen $x = x_1 \cdots x_n$ ein Binomideal ist. Wir wiederholen die dafür nötigen Definitionen.

2.4.1. Definition. Seien $I, J \subseteq S$ Ideale. Der *Quotient* der Ideale I und J ist das Ideal $I : J = \{f \in R : fJ \subseteq I\}$. Sei $f \in S$ ein Element. Die *Saturierung* von I bezüglich f ist das Ideal $I : f^\infty = \{g \in S : gf^i \in I \text{ für ein } i \geq 1\}$.

Das folgende Lemma ist ein Spezialfall der Proposition 3.11 aus dem Lehrbuch [Atiyah and MacDonald, 1994].

2.4.2. Lemma. Sei $I \subseteq S$ ein Ideal. Dann gilt $I : f^\infty = IS_f \cap S$, wobei S_f die Lokalisierung von S an der multiplikativen Menge $\{1, f, f^2, \dots\}$ ist.

Beweis. Sei $\varphi: S \rightarrow S_f, a \mapsto a/1$ der kanonische Homomorphismus. Es gilt $IS_f = \{a/f^i : a \in I, i \geq 0\}$. Sei $a \in IS_f \cap S$. Dann gilt $\varphi(a) = a/1 = b/f^i$ für gewisse $b \in I$ und $i \geq 0$. Da S ein Integritätsbereich ist, folgt $af^i = b$ und damit $a \in I : f^\infty$. Sei umgekehrt $a \in I : f^\infty$. Dann gilt $af^i \in I$ für ein $i \geq 0$. Es folgt $a/1 = af^i/f^i \in IS_f$. Insbesondere gilt $a \in IS_f \cap S$. ■

2.4.3. Lemma. Sei $I \subseteq S$ ein Ideal. Dann gilt $I : f^\infty = (I, 1 - ft)S[t] \cap S$.

Beweis. Das folgt aus Lemma 2.4.2 und dem Isomorphismus

$$S_f \cong S[t]/(1 - ft).$$

Das Bild des Ideals IS_f unter diesem Isomorphismus ist das Ideal

$$(I, 1 - ft)S[t]/(1 - ft).$$

Daraus folgt $I : f^\infty = IS_f \cap S = (I, 1 - ft)S[t] \cap S$. ■

2.4.4. Proposition. Sei $I \subseteq S$ ein Binomideal. Dann ist die Saturierung $I : x^\infty$ bezüglich des Produkts der Variablen $x = x_1 \cdots x_n$ ein Binomideal.

Beweis. Aus Lemma 2.4.3 folgt die Gleichung $I : x^\infty = (I, 1 - xt)S[t] \cap S$. Das Ideal $J = (I, 1 - xt)S[t]$ ist ein Binomideal in dem Polynomring $S[t]$. Sei G die reduzierte Gröbnerbasis von J bezüglich der lexikographischen Monomordnung mit $t > x_1 > \dots > x_n$. Nach Satz 2.3.3 besteht G aus Binomen. Nach Lemma 2.2.15 ist die Menge von Binomen $G \cap S$ eine Gröbnerbasis des Ideals $I : x^\infty = J \cap S$ bezüglich der induzierten lexikographischen Monomordnung. Daher ist $I : x^\infty$ ein Binomideal. ■

2.4.5. Proposition. Sei S_x die Lokalisierung von S an der multiplikativen Menge $\{1, x, x^2, \dots\}$. Dann ist S_x isomorph zu dem Ring $K[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$ der Laurent-Polynome.

Beweis. Kapitel 4, Aufgaben 3 und 8 in [Atiyah and MacDonald, 1994]. ■

2.5. Gitter und der Algorithmus von Pottier

In diesem Abschnitt charakterisieren wir zunächst, unter welchen Bedingungen ein Gitter als Kern einer ganzzahligen Matrix beschrieben werden kann. Aufbauend auf Kapitel 3 des Lehrbuchs [De Loera et al., 2012] definieren wir anschließend den Begriff der Graverbasis eines Gitters. Des Weiteren stellen wir den Algorithmus von Pottier vor, mit dem sich eine Graverbasis berechnen lässt. Abschließend zeigen wir, dass Graverbasen solche Erzeugendensysteme sind, die es erlauben, jeden Vektor des Gitters als positive, ganzzahlige, vorzeichenkompatible Linearkombination darzustellen.

2.5.1. Definition. Eine Untergruppe $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ heißt *Gitter*.

2.5.2. Proposition. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter. Dann ist L eine freie abelsche Gruppe vom Rang kleiner gleich n . Es gilt daher $L \cong \mathbb{Z}^r$ mit $r \leq n$.

Beweis. Theorem 14.4.11 in [Artin, 2013]. ■

Da der Ring $\mathbb{Z}$ noethersch ist, hat jede endlich erzeugte abelsche Gruppe V die Form $\mathbb{Z}^n / \text{im}_{\mathbb{Z}}(A)$ für eine ganzzahlige Matrix A . Die Matrix A heißt Präsentationsmatrix von V und das Bild $\text{im}_{\mathbb{Z}}(A)$ ist ein Gitter.

2.5.3. Satz. Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe V ist die direkte Summe von zyklischen Untergruppen $C_{d_1}, \dots, C_{d_k}$ und einer freien abelschen Gruppe L :

$$V = C_{d_1} \oplus \dots \oplus C_{d_k} \oplus L,$$

wobei $d_i \geq 1$ die Ordnung von C_{d_i} ist und $d_i \mid d_{i+1}$ für alle $i = 1, \dots, k-1$ gilt.

Beweis. Theorem 14.7.3 in [Artin, 2013]. ■

2.5.4. Proposition. Ein Gitter $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ist genau dann der Kern einer ganzzahligen Matrix, wenn die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}^n / L$ torsionsfrei ist.

Beweis. Sei L der Kern einer ganzzahligen Matrix A . Aus Proposition 2.5.2 folgt, dass der Quotient $\mathbb{Z}^n / L$ eine freie abelsche Gruppe und damit torsionsfrei ist. Sei umgekehrt $\mathbb{Z}^n / L$ torsionsfrei. Dann folgt aus Satz 2.5.3 der Isomorphismus $\mathbb{Z}^n / L \cong \mathbb{Z}^k$ für ein $k \geq 0$. Es gibt also einen Homomorphismus $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^k$, der L als Kern hat. ■

2.5.5. Beispiel. Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^3$ das Gitter, das von den Spalten der Matrix A erzeugt wird. Die Smith-Normalform von A ist die Matrix A' . Das folgende Diagramm ist kommutativ mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{Z}^3 & & \\ \uparrow P & & \downarrow Q^{-1} & & \\ \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{A'} & \mathbb{Z}^3 & \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Es gilt also $L = \ker_{\mathbb{Z}}[-1, 0, 1]$. ■

Der folgende Teil dieses Abschnitts basiert auf Kapitel 3 des Lehrbuches [De Loera et al., 2012]. Zur Vollständigkeit wurde der Beweis des bekannten Lemmas von Dickson ergänzt. Darüber hinaus wurden zusätzliche Lemmata eingefügt, um die Verständlichkeit zu erhöhen. Abschließend präsentieren wir einen alternativen Beweis von Satz 2.5.23.

2.5.6. Definition. Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{Z}^n$ heißen *vorzeichenkompatibel*, falls $a_i b_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt.

2.5.7. Definition. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$. Wir definieren die Relation $a \sqsubseteq b$, wenn a und b vorzeichenkompatibel sind und $|a_i| \leq |b_i|$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt.

2.5.8. Bemerkung. Die Relation $\sqsubseteq$ ist eine partielle Ordnung auf der Menge $\mathbb{Z}^n$. Für ganzzahlige Vektoren $a, b \in \mathbb{Z}^n$ folgt aus $a \sqsubseteq b$ stets $|a|_1 \leq |b|_1$. Wenn $a \sqsubseteq b$ und $|a|_1 = |b|_1$ gilt, so folgt $a = b$. Umgekehrt folgt aus $a \sqsubseteq b$ und $a \neq b$ stets die Ungleichung $|a|_1 < |b|_1$.

2.5.9. Proposition. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$. Es gilt genau dann $a \sqsubseteq b$, falls die Ungleichung $(a^+, a^-) \leq (b^+, b^-)$ gilt. ■

2.5.10. Definition. Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Dann heißt ein Element $m \in M$ *minimal*, wenn für alle $x \in M$ aus $x \leq m$ stets $x = m$ folgt. In dem Fall heißt das Element m auch $\leq$ -minimal.

2.5.11. Definition. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter. Die Menge der $\sqsubseteq$ -minimalen Elemente in $L \setminus \{0\}$ heißt *Graverbasis* von L .

Der folgende Satz zeigt, dass jedes Gitter eine endliche Graverbasis hat.

2.5.12. Satz. Sei $M \subseteq \mathbb{Z}^n$ eine Menge von ganzzahligen Vektoren. Die Menge der $\sqsubseteq$ -minimalen Elemente in M ist endlich.

2.5.13. Lemma. Sei $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}^n$. Dann gibt es Indizes $i < j$ mit $p_i \leq p_j$.

Beweis. Für $n = 1$ gilt die Aussage, da es andernfalls eine unendliche Folge $p_1 > p_2 > \dots$ in $\mathbb{N}$ gäbe. Sei $n > 1$ und $p_k = (p'_k, q_k)$ mit $p'_k \in \mathbb{N}^{n-1}$ und $q_k \in \mathbb{N}$. Es gibt eine unendliche Teilfolge von $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die monoton wachsend ist. (Entweder es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $q_k = m$ für unendlich viele k oder man kann induktiv eine streng monoton wachsende Teilfolge konstruieren.) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ selbst monoton wachsend. Aus der Induktionsannahme folgt, dass es Indizes $i < j$ gibt mit $p'_i \leq p'_j$. Dann folgt aus $q_i \leq q_j$ auch $p_i \leq p_j$. ■

Lemma 2.5.13 zeigt, dass die Relation $\leq$ eine Wohlquasiordnung ist. Das folgende Korollar ist die Kontraposition der Aussage in Lemma 2.5.13.

2.5.14. Korollar. Sei $I \subseteq \mathbb{N}$ und $(p_k)_{k \in I}$ eine Folge in $\mathbb{N}^n$. Wenn für alle $i < j$ stets $p_i \not\leq p_j$ gilt, so ist I endlich. ■

2.5.15. Lemma von Dickson. Die Anzahl der $\leq$ -minimale Elemente einer nichtleeren Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ ist endlich.

Beweis. Die Menge $\{p_1, p_2, \dots\}$ der $\leq$ -minimalen Elemente ist nichtleer und es gilt $p_i \not\leq p_j$ für alle $i \neq j$. Aus Korollar 2.5.14 folgt die Endlichkeit. ■

Beweis von Satz 2.5.12. Die Abbildung $\varphi: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{N}^{2n}$, $a \mapsto (a^+, a^-)$ ist injektiv und es gilt nach Proposition 2.5.9 genau dann $a \sqsubseteq b$, wenn $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ gilt. Die Aussage folgt also aus dem Lemma von Dickson 2.5.15. ■

2.5.16. Lemma. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$ mit $a \sqsubseteq b$. Dann gelten die beiden Gleichungen $(b - a)^\pm = b^\pm - a^\pm$ und die Relation $b - a \sqsubseteq b$.

Beweis. Es gilt $a^\pm \leq b^\pm$ und $b - a = (b^+ - a^+) - (b^- - a^-)$. Außerdem gilt $\text{supp}(b^\pm - a^\pm) \subseteq \text{supp}(b^\pm)$. Daraus folgt, dass die Vektoren $b^+ - a^+, b^- - a^- \in \mathbb{N}^n$ disjunkten Träger haben. Also gilt $(b - a)^\pm = b^\pm - a^\pm$. Daraus folgt wiederum $(b - a)^\pm = b^\pm - a^\pm \leq b^\pm$ und damit $b - a \sqsubseteq b$. ■

2.5.17. Definition. Sei $a \in \mathbb{Z}^n$ und $G \subseteq \mathbb{Z}^n$ eine endliche Teilmenge. Eine Darstellung $a = \sum \alpha_i g_i + r$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $g_i, r \sqsubseteq a$, $g_i \in G$ für alle i , und $g \not\sqsubseteq r$ für alle $g \in G$ heißt *Normalform von a bezüglich G* . Der Vektor r heißt *Rest einer Normalform von a bezüglich G* .

2.5.18. Satz. Sei $a \in \mathbb{Z}^n$ und $G \subseteq \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ eine endliche Teilmenge. Der folgende Algorithmus berechnet eine Normalform von a bezüglich G :

Input: $a \in \mathbb{Z}^n$, $G \subseteq \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ endlich

Output: $r = \text{Normalform}(a, G)$

$r \leftarrow a$

```

while Es gibt ein  $g \in G$  mit  $g \sqsubseteq r$  do
     $r \leftarrow r - g$ 
end while
return  $r$ 

```

Beweis. Aus Lemma 2.5.16 folgt, dass in jedem Schritt $r \sqsubseteq a$ gilt. Aus $g \neq 0$ und $r - g \sqsubseteq r$ folgt mit Bemerkung 2.5.8 außerdem $|r - g|_1 < |r|_1$. Deshalb terminiert der Algorithmus. ■

2.5.19. Algorithmus von Pottier. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter und $B \subseteq L \setminus \{0\}$ ein endliches Erzeugendensystem von L . Der folgende Algorithmus terminiert und berechnet eine Menge $G \subseteq L$, die eine Graverbasis des Gitters L enthält:

```

Input: Endliches Erzeugendensystem  $B \subseteq L \setminus \{0\}$  eines Gitters  $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ 
Output: Eine Menge  $G \subseteq L$ , die eine Graverbasis von  $L$  enthält
 $G \leftarrow B \cup (-B)$ 
 $C \leftarrow \bigcup_{g, g' \in G} \{g + g'\}$ 
while  $C \neq \emptyset$  do
    Sei  $a \in C$ 
     $C \leftarrow C \setminus \{a\}$ 
     $r \leftarrow \text{Normalform}(a, G)$ 
    if  $r \neq 0$  then
         $C \leftarrow C \cup \{r + g : g \in G\}$ 
         $G \leftarrow G \cup \{r\}$ 
    end if
end while
return  $G$ 

```

2.5.20. Lemma. Der Algorithmus von Pottier 2.5.19 terminiert.

Beweis. Sei $\{g_1, g_2, \dots\}$ die Folge von Elementen, die während der Laufzeit des Algorithmus der ursprünglichen Menge $B \cup (-B)$ hinzugefügt werden. Jeder Vektor g_i ist der Rest einer Normalform bezüglich $B \cup (-B) \cup \{g_1, \dots, g_{i-1}\}$. Insbesondere folgt aus $i < j$ stets $g_i \not\sqsubseteq g_j$. Aus Korollar 2.5.14 folgt, dass die Folge endlich ist. ■

2.5.21. Lemma. Seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren mit reellen Einträgen. In der Dreiecksungleichung $|a_1 + \dots + a_m|_1 \leq |a_1|_1 + \dots + |a_m|_1$ gilt genau dann Gleichheit, wenn a_i und a_j für alle i, j vorzeichenkompatibel sind. ■

2.5.22. Lemma. Der Algorithmus von Pottier 2.5.19 berechnet eine Menge $G \subseteq L$ mit der Eigenschaft, dass jeder Vektor $a \in L$ eine Darstellung $a = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i$ für gewisse $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $g_i \in G$ mit $g_i \sqsubseteq a$ hat.

Beweis. Sei $a \in L$. Es gilt $B \cup (-B) \subseteq G$ für ein Erzeugendensystem B des Gitters L . Deshalb lässt sich a als positive ganzzahlige Linearkombination $a = \sum \alpha_i g_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}$ und $g_i \in G$ schreiben. Unter allen solchen Darstellungen wählen wir eine, für die $\sum \alpha_i |g_i|_1$ minimal ist. Wegen der Dreiecksungleichung gilt $|a|_1 \leq \sum \alpha_i |g_i|_1$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn alle g_i paarweise vorzeichenkompatibel sind. In dem Fall ist a eine positive Linearkombination von vorzeichenkompatiblen Vektoren und es gilt $g_i \sqsubseteq a$. Angenommen, es gilt $|a|_1 < \sum \alpha_i |g_i|_1$. Seien g_1 und g_2 nicht vorzeichenkompatibel und sei $g_1 + g_2 = \sum \beta_j g'_j + r$ die im Algorithmus berechnete Normalform von $g_1 + g_2$. Es gilt $r = 0$ oder $r \in G$. Außerdem gilt $g'_j, r \sqsubseteq g_1 + g_2$. Insbesondere sind die Vektoren g'_j und r paarweise vorzeichenkompatibel. Es folgt $\sum \beta_j |g'_j|_1 + |r|_1 = |g_1 + g_2|_1 < |g_1|_1 + |g_2|_1$. Es gilt $a = \sum \beta_j g'_j + r + (\alpha_1 - 1)g_1 + (\alpha_2 - 1)g_2 + \sum_{i \geq 3} \alpha_i g_i$ im Widerspruch zur Minimalität von $\sum \alpha_i |g_i|_1$. ■

Beweis der Aussagen in 2.5.19. Sei G die von dem Algorithmus von Pottier berechnete Menge und sei $g \in L \setminus \{0\}$ ein $\sqsubseteq$ -minimales Element. Aus Lemma 2.5.22 folgt $g = \sum \alpha_i g_i$ für gewisse $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $g_i \in G$ mit $g_i \sqsubseteq g$. Aus der Minimalität von g folgt $g = g_i$ für alle i . Es gilt also $g \in G$. ■

2.5.23. Satz. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter und G die Graverbasis von L . Dann hat jeder Vektor $a \in L$ eine Darstellung $a = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i$ für gewisse $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $g_i \in G$ mit $g_i \sqsubseteq a$.

Beweis. Sei B ein Erzeugendensystem des Gitters L und sei $G' \subseteq L$ die von dem Algorithmus von Pottier 2.5.19 berechnete Menge. Es gilt $G \subseteq G'$ und jeder Vektor $a \in L$ hat eine Darstellung $a = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i$ für gewisse $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $g_i \in G'$ mit $g_i \sqsubseteq a$. Ist ein Element $g \in G'$ nicht $\sqsubseteq$ -minimal in G' , so gibt es ein $h \in G'$ mit $h \neq g$ und $h \sqsubseteq g$. Es gilt $g = (g - h) + h$. Aus Lemma 2.5.16 folgt $g - h \sqsubseteq g$. Mit Bemerkung 2.5.8 folgt $|h|_1 < |g|_1$ und $|g - h|_1 < |g|_1$. Es gilt $g - h = \sum \beta_j g'_j$ für gewisse $\beta_j \in \mathbb{N}$, $g'_j \in G'$ mit $g'_j \sqsubseteq g - h$. Dieser schrittweise Ersetzungsprozess terminiert, da es sonst eine unendlich absteigende Folge natürlicher Zahlen gäbe. ■

2.5.24. Beispiel. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^2$ das von den Vektoren $b_1 = (2, 2)$ und $b_2 = (0, 1)$ erzeugte Gitter. Der Algorithmus von Pottier 2.5.19 berechnet die Menge $G' = \{(0, 1), (-2, -2), (2, 0), (-2, 0), (2, 2), (0, -1)\}$. Die $\sqsubseteq$ -minimalen Elemente der Menge G' bilden die Graverbasis $G = \{(0, 1), (2, 0), (-2, 0), (0, -1)\}$ des Gitters L .

2.6. Gitterideale

In diesem Abschnitt wird der Begriff des Gitterideals eingeführt. Wie Satz 2.6.7 zeigen wird, handelt es sich dabei genau um die saturierten Binomideale. Der Abschnitt basiert weitgehend auf Abschnitt 3.3 in [Herzog et al., 2018], enthält jedoch einige Ergänzungen: So wird in Satz 2.6.4 ein elementarer Beweis für die Saturiertheit von Gitteridealen gegeben. Zudem wurde ein neuer Beweis für Proposition 2.6.5 formuliert, die besagt, dass die Graverbasis eines Gitters eine Erzeugermenge des zugehörigen Gitterideals bildet.

2.6.1. Definition. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter. Das Binomideal $I_L = (f_a : a \in L)$ ist das von L erzeugte Gitterideal.

Aus Bemerkung 2.3.5 folgt $I_L = (x^a - x^b : a, b \in \mathbb{N}^n \text{ mit } a - b \in L)$.

2.6.2. Proposition. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter. Das Binom $x^a - x^b$ ist genau dann in dem Gitterideal I_L enthalten, wenn $a - b \in L$ gilt.

Beweis. Das folgt aus Proposition 2.3.9. ■

2.6.3. Proposition. Sei C eine Menge von Erzeugern des Gitters $L \subseteq \mathbb{Z}^n$. Dann gilt die Gleichung $I_C : x^\infty = I_L$.

Beweis. Aus Proposition 2.4.4 folgt, dass das Ideal $I_C : x^\infty$ ein Binomideal ist. Sei $x^a - x^b \in I_C : x^\infty$. Dann gibt es einen Vektor $c \in \mathbb{N}^n$ mit $x^{a+c} - x^{b+c} \in I_C$. Aus Proposition 2.3.9 folgt $a - b = c_1 + \dots + c_l$ für gewisse Vektoren $c_i \in \pm C$. Es gilt also $a - b \in L$ und damit $x^a - x^b \in I_L$. Sei umgekehrt $x^a - x^b \in I_L$. Es gilt $a - b \in L$ und damit $a - b = c_1 + \dots + c_l$ für gewisse Vektoren $c_i \in \pm C$. Sei $v_0 = a$ und $v_i = a - c_1 - \dots - c_i \in \mathbb{Z}^n$ für $i = 1, \dots, l$. Es gilt daher $v_l = b$. Aus Bemerkung 2.3.5 folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} x^a - x^b &= x^{v_0} - x^{v_1} + x^{v_1} - x^{v_2} + \dots + x^{v_{l-1}} - x^{v_l} \\ &= x^{d_1} f_{c_1} + x^{d_2} f_{c_2} + \dots + x^{d_l} f_{c_l} \end{aligned}$$

für gewisse Vektoren $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{Z}^n$. Durch Multiplikation mit einem Monom auf beiden Seiten der Gleichung folgt die Aussage $x^a - x^b \in I_C : x^\infty$. ■

Die folgende Satz besagt, dass Gitterideale saturiert sind.

2.6.4. Satz. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter. Dann gilt $I_L : x^\infty = I_L$.

Beweis. Das folgt aus Proposition 2.6.3 mit $C = L$. ■

Sei $C \subseteq \mathbb{Z}^n$ eine Menge von Erzeugern eines Gitters L . Dann gilt im Allgemeinen $I_C \subsetneq I_L$. Ist C allerdings die Graverbasis von L , so gilt Gleichheit.

2.6.5. Proposition. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter und G die Graverbasis von L . Dann gilt die Gleichung $I_G = I_L$.

Beweis. Die Inklusion $I_G \subseteq I_L$ ist klar. Sei umgekehrt $a \in L$. Aus Satz 2.5.23 folgt, dass es eine Darstellung $a = g_1 + \dots + g_m$ für gewisse $g_i \in G$ mit $g_i \sqsubseteq a$ gibt. Es gilt also $a^+ - g_1 - \dots - g_m = a^-$. Des Weiteren gilt die Gleichung $a^+ = g_1^+ + \dots + g_m^+$. Es folgt $a^+ - g_1 - \dots - g_i = g_{i+1}^+ + \dots + g_m^+ + g_1^- + \dots + g_i^- \in \mathbb{N}^n$ für alle $i = 1, \dots, m$. Aus Proposition 2.3.9 folgt $f_a \in I_G$. ■

2.6.6. Beispiel. Sei $C = \{c_1, c_2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ mit $c_1 = (2, -2)$ und $c_2 = (1, -3)$ sowie L das von C erzeugte Gitter. Wir betrachten das Ideal $I_C = (x^2 - y^2, x - y^3)$. Es gilt $(1, 1) = c_1 - c_2 \in L$, aber $xy - 1 \notin I_C$ und damit $I_C \subsetneq I_L$. Aus der Gleichung

$$xy - 1 = xy - x^{-1}y^3 + x^{-1}y^3 - 1 = x^{-1}yf_{c_1} + x^{-1}f_{-c_2}$$

folgt $xy - 1 \in I_C : x^\infty$. Es gilt $I_L = I_C : (xy)^\infty = (x^2 - y^2, xy - 1)$. Die Graverbasis des Gitters L ist die Menge

$$G = \pm\{(2, -2), (1, 1), (3, -1), (1, -3), (4, 0), (0, 4)\}.$$

Es gilt zum Beispiel $x^5 - y^7 \in I_L$. Aus der vorzeichenkompatiblen Linearkombination $(5, -7) = 2c_1 + c_2$ folgt $x^5 - y^7 = x^3f_{c_1} + xy^2f_{c_1} + y^4f_{c_2}$.

2.6.7. Satz. Sei $I \subseteq S$ ein Binomideal. Die Saturierung $I : x^\infty$ ist ein Gitterideal.

Beweis. Wir betrachten die Menge $L = \{a \in \mathbb{Z}^n : f_a \in I : x^\infty\}$. Zunächst zeigen wir, dass die Menge L ein Gitter ist. Sei $a \in L$. Dann gilt $uf_a \in I$ für ein Monom u . Es folgt $uf_{-a} = -uf_a \in I$ und damit $-a \in L$. Sei nun $b \in L$. Dann gilt $vf_b \in I$ für ein Monom v . Aus Lemma 2.3.6 folgt die Gleichung $uvw f_{a+b} = uv(f_a f_b + x^{a^-} f_b + x^{b^-} f_a) \in I$ für ein Monom w und damit $a+b \in L$. Wir behaupten $I \subseteq I_L$. Sei $x^a - x^b$ ein Binom in I . Aus Bemerkung 2.3.5 folgt $x^a - x^b = uf_{a-b}$ für ein Monom u und damit $a-b \in L$. Es folgt $f_{a-b} \in I_L$ und damit auch $x^a - x^b \in I_L$. Nun behaupten wir $I : x^\infty = I_L$. Für $a \in L$ gilt $f_a \in I : x^\infty$ und deshalb $I_L \subseteq I : x^\infty$. Umgekehrt folgt aus $I \subseteq I_L$ mit Satz 2.6.4 die Inklusion $I : x^\infty \subseteq I_L : x^\infty = I_L$. ■

2.6.8. Korollar. Ein Binomideal $I \subseteq S$ ist genau dann ein Gitterideal, wenn die Gleichung $I = I : x^\infty$ gilt. ■

2.7. Graverbasis eines Binomideals

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Graverbasis eines Binomideals eingeführt, wie er in Abschnitt 3.2 von [Herzog et al., 2018] definiert wurde. Es wird sich zeigen, dass die Graverbasis eines Binomideals eine Menge von binomiellen Erzeugern bildet, die die universelle Gröbnerbasis enthält. Zudem wird in Satz 2.7.6 die Verbindung zwischen der Definition der Graverbasis eines Gitters aus Abschnitt 2.5 und der Graverbasis eines Gitterideals hergestellt. Abschließend wird ein weiterer Beweis von Proposition 2.6.5 gegeben.

2.7.1. Definition. Sei $I \subseteq S$ ein Binomideal. Ein Binom $f = u - v \in I$ heißt *primitiv*, falls es kein von f verschiedenes Binom $g = u' - v' \in I$ gibt mit $u' \mid u$ und $v' \mid v$.

2.7.2. Definition. Sei $I \subseteq S$ ein Binomideal. Die Menge der primitiven Binome des Binomideals I heißt *Graverbasis* von I .

2.7.3. Proposition. Die Graverbasis eines Binomideals ist endlich.

Beweis. Sei B die Menge der Binome in I . Die Abbildung $\psi: B \rightarrow \mathbb{N}^{2n}$, $x^a - x^b \mapsto (a, b)$ ist injektiv. Ein Binom $f \in B$ ist genau dann primitiv, wenn $\psi(f)$ ein $\leq$ -minimales Element von $\psi(B)$ ist. Aus dem Lemma von Dickson 2.5.15 folgt die Aussage. ■

2.7.4. Proposition. Sei $I \subseteq S$ ein Binomideal und G die reduzierte Gröbnerbasis von I bezüglich einer beliebigen Monomordnung. Dann ist jedes Binom in G primitiv.

Beweis. Sei $g = u - v$ ein Binom in G , das nicht primitiv ist. Dann gibt es ein Binom $f = u' - v' \in I$ mit $u' \mid u$, $v' \mid v$ und $f \neq g$. Angenommen, es gilt $\text{LM}(f) = v'$. Aus $f \rightarrow_G 0$ folgt $\text{LM}(h) \mid v'$ für ein $h \in G \setminus \{g\}$. Insbesondere gilt $\text{LM}(h) \mid v$ im Widerspruch zur Annahme, dass G reduziert ist. Es muss also $\text{LM}(f) = u'$ gelten. Aus $u' \mid u$ folgt $u' = u$, denn die Leitmonome der Binome in G sind das minimale Erzeugendensystem des Monomideals $\text{LM}(I)$. Es gilt $f - g = v - v' \in I$ und aus $v' \mid v$ folgt $\text{LM}(f - g) = v$. Aus $f - g \rightarrow_G 0$ folgt $\text{LM}(h) \mid v$ für ein $h \in G \setminus \{g\}$ im Widerspruch zur Annahme, dass G reduziert ist. Die Gröbnerbasis G besteht also aus primitiven Binomen. ■

2.7.5. Korollar. Die universelle Gröbnerbasis eines Binomideals ist in der Graverbasis dieses Ideals enthalten. ■

2.7.6. Satz. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter und $L' = L \setminus \{0\}$. Sei B' die Menge der Binome $u - v$ in dem Gitterideal I_L mit $\gcd(u, v) = 1$. Dann ist die Abbildung $\Phi: L' \rightarrow B'$, $\Phi(a) = f_a$ eine Bijektion. Ein Vektor $a \in L'$ ist genau dann $\sqsubseteq$ -minimal in L' , wenn

f_a primitiv ist. Eine Teilmenge $G \subseteq L'$ ist genau dann die Graverbasis des Gitters L , wenn $\Phi(G)$ die Graverbasis des Gitterideals I_L ist.

Beweis. Sei $x^a - x^b \in I_L$ primitiv. Aus Satz 2.6.4 folgt $\gcd(x^a, x^b) = 1$ und damit $x^a - x^b \in B'$. Wir betrachten die injektiven Abbildungen $\varphi: L' \rightarrow \mathbb{N}^n$, $\varphi(a) = (a^+, a^-)$ und $\psi: B' \rightarrow \mathbb{N}^n$, $\psi(x^a - x^b) = (a, b)$. Ein Vektor $a \in L'$ ist genau dann $\sqsubseteq$ -minimal, wenn $\varphi(a)$ minimal in $\varphi(L')$ bezüglich $\leq$ ist. Ein Binom $x^a - x^b \in B'$ ist genau dann primitiv, wenn $\psi(x^a - x^b)$ minimal in $\psi(B')$ bezüglich $\leq$ ist. Wir behaupten $\varphi(L') = \psi(B')$. Die Inklusion $\varphi(L') \subseteq \psi(B')$ ist klar. Sei umgekehrt $(a, b) \in \psi(B')$. Dann gilt $x^a - x^b \in B'$. Aus Proposition 2.6.2 folgt $a - b \in L'$. Wegen $\gcd(x^a, x^b) = 1$ haben die Vektoren a und b disjunkten Träger und es gilt $(a, b) = \varphi(a - b) \in \varphi(L')$. Insgesamt gilt $\Phi = \psi^{-1} \circ \varphi$ und damit die Aussage. ■

Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter und G die Graverbasis von L . Proposition 2.6.5 besagt, dass die Gleichung $I_G = I_L$ gilt. Wir schließen den Abschnitt mit einem alternativer Beweis dieser Proposition ab.

Beweis von Proposition 2.6.5. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter und G die Graverbasis von L . Sei Φ die Abbildung aus Satz 2.7.6. Dann ist $\Phi(G)$ die Graverbasis des Gitterideals I_L . Aus Korollar 2.7.5 folgt, dass $\Phi(G)$ die universelle Gröbnerbasis von I_L enthält. Es folgt $I_G = (\Phi(G)) = I_L$. ■

2.8. Halbgruppenringe

Dieser kurze Abschnitt, der auf [Gilmer, 1984] basiert, führt zunächst den Begriff des Halbgruppenrings ein. Anschließend wird gezeigt, dass der Quotient eines Polynomrings modulo einem Gitterideal isomorph zu einem Halbgruppenring ist. Dieser Isomorphismus liefert einen weiteren Beweis für die Sätturiertheit von Gitteridealen.

2.8.1. Definition. Eine *Halbgruppe* ist eine nichtleere Menge U , die abgeschlossen unter einer assoziativen binären Verknüpfung $+$ ist. Eine Halbgruppe $(U, +)$ heißt *abelsch*, falls die Verknüpfung $+$ kommutativ ist. Eine Halbgruppe heißt *Monoid*, falls sie ein neutrales Element hat.

2.8.2. Definition. Sei $(U, +)$ eine abelsche Halbgruppe. Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf U heißt *Kongruenz* auf U , falls für alle $u_1, u_2, v_1, v_2 \in U$ aus $u_1 \sim u_2$ und $v_1 \sim v_2$ stets $u_1 + v_1 \sim u_2 + v_2$ folgt.

2.8.3. Proposition. Sei $(U, +)$ eine abelsche Halbgruppe und $\sim$ eine Kongruenz auf U . Sei $\bar{u}$ die Äquivalenzklasse von u unter $\sim$ für jedes $u \in U$. Sei $U/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen $\{\bar{u} : u \in U\}$. Dann ist $U/\sim$ eine abelsche Halbgruppe unter der Operation $\bar{u} + \bar{v} = \overline{u + v}$. ■

2.8.4. Definition. Sei U eine abelsche Halbgruppe. Wir definieren den K -Vektorraum $K[U] = \bigoplus_{a \in U} Kx^a$. Durch die Multiplikation $x^a x^b = x^{a+b}$ wird eine eindeutige Ringstruktur auf $K[U]$ definiert. Der Ring $K[U]$ heißt der von U erzeugte Halbgruppenring.

2.8.5. Bemerkung. Enthält die abelsche Halbgruppe $(U, +)$ ein neutrales Element, so ist der Halbgruppenring $K[U]$ eine K -Algebra.

2.8.6. Beispiel. Der Polynomring in n Variablen $K[x_1, \dots, x_n]$ ist isomorph zu dem Halbgruppenring $K[\mathbb{N}^n]$. Der Ring der Laurent-Polynome $K[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$ ist isomorph zu dem Halbgruppenring $K[\mathbb{Z}^n]$.

2.8.7. Proposition. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter und sei $\sim$ die durch $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in L$ definierte Kongruenz auf der Halbgruppe $\mathbb{N}^n$. Dann ist der Quotient S/I_L isomorph zu dem Halbgruppenring $K[\mathbb{N}^n/\sim]$.

2.8.8. Lemma. Seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren in einem K -Vektorraum, wobei $n \geq 2$ gilt. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Skalare in K mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$. Dann gilt die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_2(v_2 - v_1) + \dots + \lambda_n(v_n - v_1).$$

Beweis von Proposition 2.8.7. Sei $U = \mathbb{N}^n/\sim$. Wir betrachten den surjektiven Ringhomomorphismus $\varphi: S \rightarrow K[U]$, $x_i \mapsto x^{\bar{e}_i}$, wobei $\bar{e}_i$ die Äquivalenzklasse von e_i in U ist. Wir behaupten $\ker \varphi = I_L$. Seien $a, b \in \mathbb{N}^n$ mit $a - b \in L$. Dann gilt $\bar{a} = \bar{b}$ in U und deshalb $\varphi(x^a - x^b) = 0$. Es folgt $I_L \subseteq \ker \varphi$. Sei umgekehrt $f \in \ker \varphi$. Dann folgt $f \in I_L$, indem man die Menge $\{a \in \mathbb{N}^n : x^a \in \text{supp}(f)\}$ bezüglich $\sim$ partitioniert und Lemma 2.8.8 anwendet. ■

2.8.9. Beispiel. Mit der Notation von oben sei $L = 3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ und $U = \mathbb{N}/\sim$. Es gilt $U = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Sei $\varphi: K[x] \rightarrow K[U]$ die Abbildung aus dem Beweis von Proposition 2.8.7. Es gilt also $x^n \mapsto x^{\bar{n}}$, wobei $\bar{n}$ die Äquivalenzklasse von n in U ist. Sei $f(x) = 5x^8 - 8x^5 + 3x^2 + 4x^7 - 4x^4$. Es gilt $f \in \ker \varphi$. Aus Lemma 2.8.8 folgt $f(x) = 5(x^8 - x^2) - 8(x^5 - x^2) + 4(x^7 - x^4)$ und damit $f \in I_L$.

2.8.10. Bemerkung. Proposition 2.8.7 ist sogar für beliebige Halbgruppen gültig wie Korollar 7.3 in [Gilmer, 1984] zeigt: Sei R ein Ring und $\sim$ eine Kongruenz auf einer abelschen Halbgruppe H . Dann gilt $R[H]/I \cong R[H/\sim]$ mit $I = (x^a - x^b : a \sim b)$.

Der Isomorphismus $S/I_L \cong K[\mathbb{N}^n/\sim]$ aus Proposition 2.8.7 liefert den folgenden alternativen Beweis der Saturiertheit von Gitteridealen.

Beweis von Satz 2.6.4. Sei $f \in I_L : x^\infty$. Dann gibt es ein Monom u mit $uf \in I_L$. Aus Proposition 2.8.7 folgt, dass kein Monom ein Nullteiler in S/I_L ist. Deshalb gilt $f \in I_L$. ■

2.8.11. Lemma. Seien V und W kommutative Monoide und sei $U = V \oplus W$. Dann gilt $K[U] \cong K[V] \otimes_K K[W]$.

Beweis. Man kann einen Isomorphismus mit der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts von K -Algebren aus Abschnitt 1.e in dem Skript [Milne, 2024] konstruieren. ■

Eine ausführlichere Darstellung des Zusammenhangs zwischen Binomidealen und Kongruenzen auf $\mathbb{N}^n$ kann in den Artikeln [Kahle et al., 2016a] und [Matusевич and Ojeda, 2018] gefunden werden.

2.9. Torische Ideale

Im Folgenden charakterisieren wir Binomideale, die Primideale sind. Solche Ideale heißen torisch. Torische Ideale sind genau die Gitterideale I_L , für die das Gitter L der Kern einer ganzzahligen Matrix ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Smith-Normalform einer jeden Präsentationsmatrix der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^n/L$ nur Nullen und Einsen auf der Diagonalen hat. In dem Fall ist $\mathbb{Z}^n/L$ eine freie abelsche Gruppe und insbesondere torsionsfrei.

2.9.1. Proposition. Sei $I \subseteq S$ ein Binomideal, das ein Primideal ist. Dann ist I ein Gitterideal.

Beweis. Sei $L = \{a \in \mathbb{Z}^n : f_a \in I\}$. Seien $a, b \in L$. Dann folgt aus Lemma 2.3.6 $uf_{a+b} \in I$ für ein Monom u . Da I kein Monom enthält und ein Primideal ist, folgt $f_{a+b} \in I$ und damit $a + b \in L$. Außerdem folgt aus $-f_a = f_{-a}$ auch $-a \in L$. Die Menge $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ist also ein Gitter und es gilt $I_L \subseteq I$. Sei umgekehrt $x^a - x^b \in I$ ein Binom in I . Aus Bemerkung 2.3.5 folgt $x^a - x^b = uf_{a-b}$ für ein Monom u . Also gilt $f_{a-b} \in I_L$ und damit auch $x^a - x^b \in I_L$. ■

2.9.2. Definition. Ein Ideal $I \subseteq S$ heißt *torisch*, falls $I = I_L$ mit $L = \ker_{\mathbb{Z}} A$ für eine ganzzahlige Matrix A gilt.

2.9.3. Proposition. Torische Ideale sind Primideale.

Beweis. Sei $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ und $L = \ker_{\mathbb{Z}} A$. Sei $a_i \in \mathbb{Z}^d$ die i -te Spalte von A . Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi: S \rightarrow K[t_1^{\pm}, \dots, t_d^{\pm}]$ mit $x_i \mapsto t^{a_i}$. Der Kern von φ ist ein Primideal, da der Ring der Laurent-Polynome ein Integritätsbereich ist. Wir behaupten $\ker \varphi = I_L$. Sei $b \in \ker_{\mathbb{Z}} A$. Dann gilt $Ab^+ = Ab^-$ und damit $\varphi(f_b) = t^{Ab^+} - t^{Ab^-} = 0$. Es folgt $I_L \subseteq \ker \varphi$. Sei umgekehrt $f \in \ker \varphi$. Dann folgt die Aussage, indem $\text{supp}(f)$ geeignet partitioniert und Lemma 2.8.8 zusammen mit Bemerkung 2.3.5 angewendet. ■

2.9.4. Satz. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter. Das Gitterideal I_L ist genau dann ein Primideal, wenn die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}^n/L$ torsionsfrei ist.

Beweis 1. Sei $T = S_x$ der Ring der Laurent-Polynome. Das Ideal I_L ist genau dann ein Primideal, wenn die Extension $I_L T$ ein Primideal ist. Es gilt $T/I_L T \cong K[\mathbb{Z}^n/L]$. Aus Theorem 8.1 in [Gilmer, 1984] folgt, dass der Gruppenring $K[\mathbb{Z}^n/L]$ genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn die Gruppe $\mathbb{Z}^n/L$ torsionsfrei ist. ■

2.9.5. Bemerkung. Der Beweis von Theorem 8.1 in [Gilmer, 1984] benutzt die Tatsache, dass abelsche torsionsfreie Gruppen auf eine mit der Gruppenverknüpfung verträgliche Weise total geordnet werden können.

Beweis 2. Sei I_L ein Primideal. Sei $b \in \mathbb{Z}^n$ mit $mb \in L$ für ein $m > 0$. Wir behaupten $b \in L$. Wir betrachten zunächst den Fall $\text{char}(K) = 0$. Es gilt die Gleichung $f_{mb} = f_b g \in I_L$ mit $g = \sum_{i=1}^m x^{(m-i)b^+} x^{(i-1)b^-}$. Aus $g(1, \dots, 1) = m \neq 0$ folgt $g \notin I_L$ und damit $f_b \in I_L$. Aus Proposition 2.6.2 folgt $b \in L$. Ist die Charakteristik von K eine Primzahl p , so schreibt man $m = p^e m'$ für eine ganze Zahl $m' \geq 1$ teilerfremd zu p und benutzt die Gleichung $f_{mb} = f_b^{p^e} h$ mit $h = \sum_{i=1}^{m'} x^{(m'-i)p^e b^+} x^{(i-1)p^e b^-}$. ■

Wir fassen die Ergebnisse des Abschnitts zusammen.

2.9.6. Satz. Sei $I \subseteq S$ ein Binomideal. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) I ist ein Primideal;
- (ii) $I = I_L$ für ein Gitter $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ mit torsionsfreiem Quotienten $\mathbb{Z}^n/L$;
- (iii) I ist ein torisches Ideal.

Beweis. Wenn I ein Primideal ist, so folgt aus Proposition 2.9.1, dass $I = I_L$ gilt für ein Gitter $L \subseteq \mathbb{Z}^n$. Aus Satz 2.9.4 folgt, dass $\mathbb{Z}^n/L$ torsionsfrei ist. Aus Proposition 2.5.4 folgt, dass L in diesem Fall der Kern einer ganzzahligen Matrix und damit torisch ist. Abschließend folgt aus Proposition 2.9.3, dass torische Ideale Primideale sind. ■

2.10. Radikalität von Gitteridealen

Satz 2.10.1 liefert ein Kriterium für die Radikalität von Gitteridealen und stellt eine Verallgemeinerung von Theorem 3.23 in [Herzog et al., 2018] dar. Zudem wurde der Beweis in einigen Punkten verändert. Insbesondere nutzt der Beweis von Lemma 2.10.2 nun den Isomorphismus zwischen dem Quotienten eines Polynomrings mit einem Binomideal und dem entsprechenden Gruppenring aus Abschnitt 2.8.

2.10.1. Satz. *Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter. Falls $\text{char}(K) = 0$ gilt oder $\text{char}(K) > 0$ keine Ordnung eines Elements in der Gruppe $\mathbb{Z}^n / L$ teilt, ist das Gitterideal I_L radikal.*

2.10.2. Lemma. *Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \nmid m$. Dann ist der Gruppenring $K[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]$ reduziert.*

Beweis. Sei $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $p = \text{char}(K)$. Sei $f = \sum c_a x^a \neq 0$ ein Element in $K[G]$. Da der Gruppenring $K[G]$ Charakteristik p hat, gilt $f^{p^k} = \sum c_a^{p^k} x^{ap^k}$. Da p^k und m teilerfremd sind, folgt aus $ap^k = bp^k$ stets $a = b$ in G . Daraus folgt $f^{p^k} \neq 0$. ■

2.10.3. Beispiel. In $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ gilt $(x+1)^2 = x^2 + 1 = 1 + 1 = 0$. ■

2.10.4. Lemma. *Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) = 0$. Dann ist der Gruppenring $K[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]$ reduziert.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass K algebraisch abgeschlossen ist. Sei $T = K[x^\pm]$ der Ring der Laurent-Polynome in einer Variablen. Es gilt $K[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}] \cong T/(x^m - 1)$. Das Polynom $x^m - 1$ ist separabel und es gilt deshalb $x^m - 1 = \prod_{i=1}^m (x - u_i)$ für paarweise verschiedene u_i . Deshalb gilt $(x^m - 1) = \bigcap_{i=1}^m (x - u_i)$. Die Ideale $(x - u_i)$ sind prim in T . Deshalb ist das Ideal $(x^m - 1)$ radikal. ■

2.10.5. Bemerkung. Der Beweis von Lemma 2.10.4 funktioniert auch in der Situation von Lemma 2.10.2, da das Polynom $x^m - 1$ separabel ist, falls $p \nmid m$.

2.10.6. Lemma. *Sei K algebraisch abgeschlossen. Seien A und B reduzierte K -Algebren, wobei A endlich erzeugt ist. Dann ist die K -Algebra $A \otimes_K B$ reduziert.*

Beweis. Proposition 5.17 in [Milne, 2024]. ■

Beweis von Satz 2.10.1. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass K algebraisch abgeschlossen ist. Sei $T = S_x$ der Ring der Laurent-Polynome. Aus Lemma 2.4.2 und Satz 2.6.4 folgt $I_L T \cap S = I_L$:

$x^\infty = I_L$. Es genügt also zu zeigen, dass das Ideal $I_L T$ radikal ist. Es gilt $T/I_L T \cong K[\mathbb{Z}^n/L]$ und $\mathbb{Z}^n/L \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_l\mathbb{Z}$. Aus Lemma 2.8.11 folgt $K[\mathbb{Z}^n/L] \cong K[\mathbb{Z}^r] \otimes_K K[\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}] \otimes_K \dots \otimes_K K[\mathbb{Z}/m_l\mathbb{Z}]$. Die Aussage folgt aus den Lemmata 2.10.2, 2.10.4 und 2.10.6. ■

2.10.7. Beispiel. Sei $L = 3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Dann gilt $I_L = (x^3 - 1)$. Das Ideal I_L ist über jedem Körper K mit $\text{char}(K) \neq 3$ radikal. Über $K = \mathbb{F}_3$ gilt allerdings $(x - 1)^3 = x^3 - 1 \in I_L$ und $x - 1 \notin I_L$. ■

2.11. Lawrence-Ideale

In diesem Abschnitt wird das Konzept des Lawrence-Ideals eines Binomideals eingeführt. Ein Lawrence-Ideal ist ein homogenes Binomideal in einem Polynomring mit doppelt so vielen Variablen. In Satz 2.11.11 wird gezeigt, dass die Gröbnerbasis des Lawrence-Ideals eines Gitterideals mit der Graverbasis des zugehörigen Gitters übereinstimmt. Dies liefert neben dem Algorithmus von Pottier 2.5.19 eine alternative Methode zur Berechnung der Graverbasis eines Gitterideals.

Im Folgenden betrachten wir die Polynomringe $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$ und $K[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$. Für ein Binom $f = x^a - x^b \in K[\mathbf{x}]$ definieren wir das Binom $f^\# = x^a y^b - x^b y^a \in K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}^n$ gilt die Formel

$$(x^c(x^a - x^b))^\# = x^c y^c (x^a - x^b)^\#.$$

2.11.1. Notation. Sei $I \subseteq K[\mathbf{x}]$ ein Ideal. Wir bezeichnen mit $B(I)$ die Menge der Binome in I . Sei außerdem $B'(I)$ die Menge der Binome $x^a - x^b \in B(I)$ mit $\gcd(x^a, x^b) = 1$.

2.11.2. Definition. Sei $I \subseteq K[\mathbf{x}]$ ein Binomideal. Das *Lawrence-Ideal* von I ist das Binomideal $\Lambda(I) = (f^\# : f \in B(I)) \subseteq K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Da das Lawrence-Ideale $\Lambda(I)$ homogen ist, folgt aus der graduierten Version des Lemmas von Nakayama, dass alle minimalen Erzeugendensysteme von $\Lambda(I)$ dieselbe Kardinalität haben.

2.11.3. Proposition. Sei $I \subseteq K[\mathbf{x}]$ ein Binomideal und $x^a y^c - x^b y^d \in \Lambda(I)$. Dann gilt $x^a - x^b \in I$, $x^c - x^d \in I$ und $a + c = b + d$.

Beweis. Sei $F = x^a y^c - x^b y^d \in \Lambda(I)$. Dann gibt es Binome $x^{a_i} - x^{b_i} \in I$ mit $F(x, y) = \sum_{i=1}^m h_i(x, y)(x^{a_i} y^{b_i} - x^{b_i} y^{a_i})$. Durch die Substitution $y = 1$ folgt $x^a - x^b \in I$. Durch die Substitution $x = 1$ und $y = x$ folgt $x^c - x^d \in I$. Durch die Substitution $y = x$ folgt $x^{a+c} - x^{b+d} = 0$ und damit $a + c = b + d$. ■

2.11.4. Proposition. Sei $I \subseteq K[\mathbf{x}]$ ein Binomideal. Es gilt genau dann $F \in B'(\Lambda(I))$, wenn es ein $f \in B'(I)$ gibt mit $F = f^\#$.

2.11.5. Lemma. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}^n$ mit $a + c = b + d$, $\text{supp}(a) \cap \text{supp}(b) = \emptyset$ und $\text{supp}(c) \cap \text{supp}(d) = \emptyset$. Dann gilt $a = d$ und $b = c$. ■

Beweis von Proposition 2.11.4. Aus $f \in B'(I)$ folgt $f^\# \in B'(\Lambda(I))$. Sei umgekehrt $F \in B'(\Lambda(I))$. Dann gilt $F = x^a y^c - x^b y^d$ für gewisse $a, b, c, d \in \mathbb{N}^n$ mit $a + c = b + d$ und $\gcd(x^a y^c, x^b y^d) = 1$. Es folgt $\text{supp}(a) \cap \text{supp}(b) = \emptyset$ und $\text{supp}(c) \cap \text{supp}(d) = \emptyset$. Aus Lemma 2.11.5 folgt $a = d$ und $c = b$. Es gilt also $F = x^a y^b - x^b y^a = (x^a - x^b)^\#$. ■

Für eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{Z}^n$ schreiben wir $\Lambda(C) = \{(c, -c) : c \in C\}$. Es gilt wegen $f_{(c, -c)} = f_c^\#$ stets $I_{\Lambda(C)} \subseteq \Lambda(I_C)$. Im Allgemeinen gilt $I_{\Lambda(C)} \subsetneq \Lambda(I_C)$, wie das folgende Beispiel zeigt.

2.11.6. Beispiel. Sei $C = \{c_1, c_2\}$ mit $c_1 = (2, -2)$ und $c_2 = (1, -3)$. Wir betrachten das Ideal $I_C = (x_1^2 - x_2^2, x_1 - x_2^3)$. Es gilt $\Lambda(C) = \{(2, -2, -2, 2), (1, -3, -1, 3)\}$ und damit $I_{\Lambda(C)} = (x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2, x_1 y_2^3 - x_2^3 y_1) = (f_{c_1}^\#, f_{c_2}^\#)$. Es gilt $f = x_2^2 - x_2^6 \in I_C$, denn $(0, 2) + c_1 - c_2 + c_1 - c_2 - c_1 = (0, 6)$. Allerdings gilt $f^\# = x_2 y_2^6 - x_2^6 y_2^2 \notin I_{\Lambda(C)}$, denn der Vektor $(0, 2, 0, 6)$ kann nicht durch schrittweises Addieren von Elementen in $\pm\Lambda(C)$ in den Vektor $(0, 6, 0, 2)$ überführt werden, ohne dass dabei die Menge $\mathbb{N}^4$ verlassen wird. Es folgt $I_{\Lambda(C)} \subsetneq \Lambda(I_C)$.

2.11.7. Proposition. Sei $I \subseteq K[\mathbf{x}]$ ein Binomideal und seien $g_1, \dots, g_m \in I$ Binome mit $\Lambda(I) = (g_1^\#, \dots, g_m^\#)$. Dann gibt es eine Teilmenge $G \subseteq \{g_1, \dots, g_m\}$, sodass die Menge $\pm G$ die Graverbasis von I ist.

Beweis. Sei $f = x^a - x^b \in I$ primitiv. Dann gibt es Polynome $h_i \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ mit $f^\# = x^a y^b - x^b y^a = h_1 g_1^\# + \dots + h_m g_m^\#$. Es gibt also ein Binom $g = x^c y^d - x^d y^c$ mit $g = \pm g_i^\#$ für ein i und $x^c y^d \mid x^a y^b$. Insbesondere gilt $x^c - x^d \in I$ mit $x^c \mid x^a$ und $x^d \mid x^b$. Da f primitiv ist, folgt $f = \pm g_i$. ■

2.11.8. Beispiel. Proposition 2.11.7 liefert eine weitere Begründung für die Aussage $I_{\Lambda(C)} \subsetneq \Lambda(I_C)$ in Beispiel 2.11.6. Die reduzierte Gröbnerbasis des Ideals I_C bezüglich der lexikographischen Ordnung mit $x_1 > x_2$ ist die Menge $G = \{x_2^6 - x_2^2, x_1 - x_2^3\}$. Diese ist wegen Korollar 2.7.5 in der Graverbasis des Ideals I_C enthalten. Es gilt aber $G \not\subseteq \pm\{f_{c_1}, f_{c_2}\}$ und damit $I_{\Lambda(C)} \subsetneq \Lambda(I_C)$.

2.11.9. Proposition. Sei $L \in \mathbb{Z}^n$ ein Gitter. Dann gilt $\Lambda(I_L) = I_{\Lambda(L)}$.

Beweis. Es gilt $\Lambda(I_L) = ((x^a - x^b)^\# : a - b \in L)$. Des Weiteren folgt aus $f_{(a,-a)} = f_a^\#$ die Gleichung $I_{\Lambda(I_L)} = (f_a^\# : a \in L)$. Es gilt $I_{\Lambda(I)} \subseteq \Lambda(I_L)$. Aus $(x^a - x^b)^\# = (x^c f_{a-b})^\# = x^c y^c f_{a-b}^\#$ für ein $c \in \mathbb{N}^n$ folgt $\Lambda(I_L) \subseteq I_{\Lambda(I)}$. ■

Seien $\Phi: L \setminus \{0\} \rightarrow B'(I_L)$, $\Phi(a) = f_a$ und $\Psi: \Lambda(L) \setminus \{0\} \rightarrow B'(\Lambda(I_L))$, $\Psi(a, -a) = f_a^\#$ die Bijektionen aus Satz 2.7.6 und $\varphi: L \rightarrow \Lambda(L)$ der Gruppenisomorphismus mit $\varphi(a) = (a, -a)$. Die Abbildung φ erhält $\sqsubseteq$ -Minimalität. Die Bijektion $\psi = \Psi \circ \varphi \circ \Phi^{-1}$ erfüllt $\psi(f_a) = f_a^\#$. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} L \setminus \{0\} & \xrightarrow{\varphi} & \Lambda(L) \setminus \{0\} \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ B'(I_L) & \xrightarrow[\psi]{} & B'(\Lambda(I_L)) \end{array}$$

Die Abbildung ψ bildet die Graverbasis des Gitterideals I_L bijektiv auf die Graverbasis des Lawrence-Ideals $\Lambda(I_L)$ ab. Wir fassen die Aussage in der folgenden Proposition zusammen.

2.11.10. Proposition. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter. Ein Binom $f \in I_L$ ist genau dann primitiv, wenn $f^\# \in \Lambda(I_L)$ primitiv ist und jedes primitive Binom in $\Lambda(I_L)$ ist von der Form $f^\#$ für ein primitives Binom $f \in I_L$. ■

2.11.11. Satz. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter und B ein minimales aus Binomen bestehendes Erzeugendensystem des Ideals $\Lambda(I_L)$. Dann ist $\pm B$ die Graverbasis von $\Lambda(I_L)$.

Beweis. Sei $\{F_1, \dots, F_m\} \subseteq B(\Lambda(I_L))$ ein minimales Erzeugendensystem von $\Lambda(I_L)$. Aus der Homogenität von $\Lambda(I_L)$ folgt $\{F_1, \dots, F_m\} \subseteq B'(\Lambda(I_L))$. Wegen Proposition 2.11.4 gibt es Binome $f_1, \dots, f_m \in B'(I_L)$ mit $F_i = f_i^\#$. Aus Proposition 2.11.7 folgt, dass es eine Teilmenge $G \subseteq \{f_1, \dots, f_m\}$ gibt, sodass $\pm G$ die Graverbasis von I_L ist. Aus Proposition 2.11.10 folgt, dass $\pm\{F_1, \dots, F_m\}$ die Graverbasis von $\Lambda(I_L)$ ist. ■

Satz 2.11.11 liefert neben dem Algorithmus von Pottier 2.5.19 eine weitere Möglichkeit, die Graverbasis eines Gitters zu berechnen.

2.11.12. Algorithmus. Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein Gitter und C eine Menge von Erzeugern von L . Dann ist $\Lambda(C)$ eine Menge von Erzeugern von $\Lambda(L)$. Aus Proposition 2.6.3 folgt $\Lambda(I_L) = I_{\Lambda(C)} : (xy)^\infty$. Mit Lemma 2.4.3 kann eine reduzierte Gröbnerbasis von $\Lambda(I_L)$ berechnet werden. Sie besteht aus primitiven Binomen und hat daher die Form $\{g_1^\#, \dots, g_m^\#\}$. Aus Satz 2.11.11 folgt, dass $\pm\{g_1^\#, \dots, g_m^\#\}$ die Graverbasis von $\Lambda(I_L)$ ist. Aus Proposition 2.11.10 folgt, dass $\pm\{g_1, \dots, g_m\}$ die Graverbasis von I_L ist.

2.11.13. Beispiel. Wir betrachten das von den Vektoren $b_1 = (2, 2)$ und $b_2 = (0, 1)$ erzeugte Gitter $L \subseteq \mathbb{Z}^2$ aus Beispiel 2.5.24. Sei $C = \{b_1, b_2\}$. Dann gilt $\Lambda(C) = \{(2, 2, -2, -2), (0, 1, 0, -1)\}$ und $I_{\Lambda(C)} = (x_1^2 x_2^2 - y_1^2 y_2^2, x_2 - y_2)$. Die Menge $\{x_1^2 - y_1^2, x_2 - y_2\}$ ist eine reduzierte Gröbnerbasis des Ideals $\Lambda(I_L) = I_{\Lambda(C)} : (xy)^\infty$. Also ist $\pm\{x_1^2 - 1, x_2 - 1\}$ die Graverbasis von I_L beziehungsweise $\pm\{(2, 0), (1, 0)\}$ die Graverbasis des Gitters L .

2.12. Graphen

Hier wird ein Resultat über die Smith-Normalform der Inzidenzmatrix eines Graphen zitiert, das in Abschnitt 3.8 aufgegriffen wird.

2.12.1. Definition. Die *Inzidenzmatrix* eines ungerichteten Graphen ohne Schleifen $G = (V, E)$ ist die Matrix $\text{Inz}(G) \in \{0, 1\}^{V \times E}$, die durch

$$\text{Inz}(G)_{ve} = \begin{cases} 1, & v \in e, \\ 0, & v \notin e \end{cases}$$

für alle $v \in V$ und $e \in E$ definiert ist.

2.12.2. Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph ohne Schleifen mit n Knoten. Sei $c(G)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G . Sei $c_1(G)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G , die nicht bipartit sind. Dann ist die Smith-Normalform der Inzidenzmatrix $\text{Inz}(G)$ gleich der Matrix

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $D = \text{diag}(1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$, $n - c(G)$ die Anzahl der Einsen und $c_1(G)$ die Anzahl der Zweien ist.

Beweis. Theorem 3.3 in [Grossman et al., 1995]. ■

2.13. Summen von Primidealen

In diesem Abschnitt geht es um Summen von Idealen in Polynomringen mit unterschiedlichen Variablenmengen. Insbesondere wird gezeigt, dass die Summe von zwei Primidealen in unterschiedlichen Variablenmengen wieder ein Primideale ist, falls der zugrundeliegende Körper algebraisch abgeschlossen ist. Diese Überlegungen werden in Abschnitt 3.9 aufgegriffen. Der Beweis von Satz 2.13.7 folgt dabei der Beweisidee von [darij grinberg, 2011].

2.13.1. Bemerkung. Sei R ein Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Für die Extension des Ideals I unter der Inklusion $R \rightarrow R[x]$ gilt $IR[x] = I[x]$. Aus dem Isomorphismus $R[x]/P[x] = (R/P)[x]$ folgt, dass ein Ideal $P \subset R$ genau dann ein Primideal ist, wenn die Extension $P[x] \subset R[x]$ ein Primideal ist.

Im Folgenden seien $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$ und $K[\mathbf{y}] = K[y_1, \dots, y_m]$ Polynomringe in den Variablenmengen $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{y_1, \dots, y_m\}$. Seien $I \subseteq K[\mathbf{x}]$ und $J \subseteq K[\mathbf{y}]$ Ideale. Dann bezeichnen wir mit $I + J$ die Summe der Extensionen von I und J unter den Inklusionen $K[\mathbf{x}] \rightarrow K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ und $K[\mathbf{y}] \rightarrow K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Es gilt daher $I + J = I[\mathbf{y}] + J[\mathbf{x}] = IK[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + JK[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

2.13.2. Proposition. Seien $I \subsetneq K[\mathbf{x}]$ und $J \subsetneq K[\mathbf{y}]$ echte Ideale. Dann gilt die Gleichung $K[\mathbf{x}] \cap (I + J) = I$.

Beweis. Wir betrachten die lexikographische Monomordnung auf $K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ mit $x_1 > \dots > x_n > y_1 > \dots > y_m$. Sei $G_1 = \{f_1(x), \dots, f_r(x)\}$ eine Gröbnerbasis von $I \subseteq K[\mathbf{x}]$ und sei $G_2 = \{g_1(y), \dots, g_s(y)\}$ eine Gröbnerbasis von $J \subseteq K[\mathbf{y}]$. Aus Buchbergers Kriterium 2.2.13 folgt mit Lemma 2.2.7, dass die Vereinigung $G = G_1 \cup G_2$ eine Gröbnerbasis von $I + J$ ist. Aus Lemma 2.2.15 folgt, dass der Schnitt $G \cap K[\mathbf{x}] = G_1$ eine Gröbnerbasis der Kontraktion $K[\mathbf{x}] \cap (I + J)$ ist. Es folgt also $K[\mathbf{x}] \cap (I + J) = I$. ■

Im Folgenden sind alle Tensorprodukte über dem Körper K .

2.13.3. Proposition. Sei K algebraisch abgeschlossen. Seien A und B beides K -Algebren und Integritätsbereiche, wobei A endlich erzeugt ist. Dann ist die K -Algebra $A \otimes B$ ein Integritätsbereich.

Beweis. Proposition 5.17 in [Milne, 2024]. ■

2.13.4. Proposition. Sei K algebraisch abgeschlossen. Seien A und B beides K -Algebren, wobei A endlich erzeugt ist. Seien $P \subset A$ und $Q \subset B$ Primideale. Dann ist das Ideal $P \otimes B + A \otimes Q$ ein Primideal.

2.13.5. Lemma. Seien A und B beides K -Algebren und $\varphi: A \otimes B \rightarrow (A/I) \otimes (B/J)$ der kanonische K -Algebra Homomorphismus mit $a \otimes b \mapsto \bar{a} \otimes \bar{b}$. Dann gilt die Gleichung $\ker \varphi = I \otimes B + A \otimes J$.

Beweis. Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar. Insbesondere folgt aus der universellen Eigenschaft von Quotienten, dass es einen eindeutigen Homomorphismus

$$\bar{\varphi}: (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J) \rightarrow A/I \otimes B/J$$

gibt mit $\overline{\varphi}(\overline{a \otimes b}) = \overline{a} \otimes \overline{b}$. Es gilt genau dann $\ker \varphi = I \otimes B + A \otimes J$, wenn der Homomorphismus $\overline{\varphi}$ injektiv ist. Wir konstruieren eine Umkehrabbildung von $\overline{\varphi}$. Die Abbildung $A/I \times B/J \rightarrow (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$ ist K -bilinear. Deshalb gibt es eine K -lineare Abbildung $A/I \otimes B/J \rightarrow (A \otimes B)/(I \otimes B + A \otimes J)$ mit $\overline{a} \otimes \overline{b} \mapsto \overline{a \otimes b}$. Diese ist die Umkehrabbildung von $\overline{\varphi}$. ■

Beweis von Proposition 2.13.4. Der Homomorphismus $\varphi: A \otimes B \rightarrow (A/P) \otimes (B/Q)$ mit $x \otimes y \mapsto \overline{x} \otimes \overline{y}$ ist surjektiv. Aus Proposition 2.13.3 folgt, dass die K -Algebra $(A/P) \otimes (B/Q)$ ein Integritätsbereich ist. Deshalb ist $\ker \varphi$ ein Primideal. Aus Lemma 2.13.5 folgt $\ker \varphi = P \otimes B + A \otimes Q$. ■

2.13.6. Proposition. Seien $I \subseteq K[\mathbf{x}]$ und $J \subseteq K[\mathbf{y}]$ Ideale. Es gibt einen Isomorphismus $\varphi: K[\mathbf{x}] \otimes K[\mathbf{y}] \rightarrow K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ mit $\varphi(f \otimes g) = fg$ für alle $f \in K[\mathbf{x}]$ und $g \in K[\mathbf{y}]$. Unter diesem Isomorphismus korrespondiert das Ideal $I \otimes K[\mathbf{y}] + K[\mathbf{x}] \otimes J$ zu dem Ideal $I + J \subseteq K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Beweis. Die Existenz des Isomorphismus folgt aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts von K -Algebren. Diese wird zum Beispiel in Lemma 6 des Lehrbuches [Bosch et al., 2013] beschrieben. Wir behaupten die Gleichung $\varphi(I \otimes K[\mathbf{y}] + K[\mathbf{x}] \otimes J) = I + J$. Die Inklusion „ $\subseteq$ “ ist klar. Sei umgekehrt $h \in I + J$. Dann gilt $h = f + g$ mit $f = \sum a_i(x)y^i$ und $g = \sum b_j(y)x^j$ für gewisse $a_i(x) \in I$ und $b_j(y) \in J$. Daraus folgt „ $\supseteq$ “. ■

2.13.7. Satz. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Seien $P \subset K[\mathbf{x}]$ und $Q \subset K[\mathbf{y}]$ Primideale. Dann ist das Ideal $P + Q$ ein Primideal in $K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Beweis. Das folgt aus Proposition 2.13.4 und Proposition 2.13.6. ■

Wenn der Körper K nicht algebraisch abgeschlossen ist, gilt die Aussage in Satz 2.13.7 im Allgemeinen nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

2.13.8. Beispiel. Wir betrachten die Ideale $I = (x^2 + x + 1) \subset \mathbb{Q}[x]$ und $J = (y^2 + y + 1) \subset \mathbb{Q}[y]$. Die Ideale I und J sind Primideale, denn $x^2 + x + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Die Summe $I + J = (x^2 + x + 1, y^2 + y + 1) \subset \mathbb{Q}[x, y]$ ist kein Primideal, denn es gilt $(y - x)(y - x^2) = (x - y - 1)(x^2 + x + 1) + (y^2 + y + 1) \in I + J$, aber $y - x \notin I + J$ und $y - x^2 \notin I + J$.

2.13.9. Satz. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Dann gilt $K[\mathbf{x}] \cap IL[\mathbf{x}] = I$ für jedes Ideal $I \subseteq K[\mathbf{x}]$.

Wir wiederholen einige elementare Lemmata der Linearen Algebra über das Tensorprodukt von K -Vektorräumen, bevor wir Satz 2.13.9 beweisen.

2.13.10. Lemma. Seien V und W beides K -Vektorräume. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W . Dann ist $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von $V \otimes W$.

Beweis. Es ist klar, dass $(v_i \otimes w_j)_{i,j}$ ein Erzeugendensystem des K -Vektorraums $V \otimes W$ ist. Sei $\sum c_{ij} v_i \otimes w_j = 0$ eine Linearkombination und $(k, l) \in I \times J$ fest. Die Abbildung $V \times W \rightarrow K, (v, w) \mapsto a_k b_l$, wobei $v = \sum a_i v_i$ mit $w = \sum b_j w_j$, ist K -bilinear und lässt sich deshalb zu einer K -linearen Abbildung $\varphi: V \otimes W \rightarrow K$ mit $v \otimes w \mapsto a_l b_k$ fortsetzen. Es gilt $\varphi(v_l \otimes w_k) = 1$ und $\varphi(v_i \otimes w_j) = 0$ für $(i, j) \neq (l, k)$. Es folgt $0 = \varphi(\sum c_{ij} v_i \otimes w_j) = c_{lk}$. Da l und k beliebig waren, folgt die lineare Unabhängigkeit von $(v_i \otimes w_j)_{i,j}$. ■

2.13.11. Lemma. Seien V und W beides K -Vektorräume. Für Vektoren $v \in V$ und $w \in W$ folgt aus $v \otimes w = 0$ in dem K -Vektorraum $V \otimes W$ stets $v = 0$ oder $w = 0$.

Beweis. Sei $(v_i)_i$ eine Basis von V und $(w_j)_j$ eine Basis von W . Sei $v = \sum_i \lambda_i v_i$ und $w = \sum_j \mu_j w_j$. Dann gilt $v \otimes w = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)$. Aus Lemma 2.13.10 folgt $\lambda_i \mu_j = 0$ für alle i und j . Aus $\lambda_i \neq 0$ für ein i folgt somit $\mu_j = 0$ für alle Indizes j . Es folgt $w = 0$. ■

2.13.12. Lemma. Seien A und B beiden K -Algebren. Dann ist der kanonische K -Algebra Homomorphismus $\sigma: A \rightarrow A \otimes B, a \mapsto a \otimes 1$ injektiv.

Beweis. Das folgt aus Lemma 2.13.11, denn aus $a \otimes 1 = 0$ folgt $a = 0$. ■

Beweis von Satz 2.13.9. Es gilt genau dann $I = K[x] \cap IL[x]$, wenn der Ringhomomorphismus $\varphi: K[x]/I \rightarrow L[x]/IL[x]$ mit $f + I \mapsto f + IL[x]$ injektiv ist. Aus Proposition 7 in dem Lehrbuch [Bosch et al., 2013] folgt der kanonische Isomorphismus $\Phi: K[x]/I \otimes L \rightarrow L[x]/IL[x]$ mit $(f + I) \otimes \alpha \mapsto (\alpha f) + IL[x]$. Des Weiteren ist der kanonische K -Algebra Homomorphismus $\sigma: K[x]/I \rightarrow K[x]/I \otimes L$ mit $f + I \mapsto (f + I) \otimes 1$ nach Lemma 2.13.12 injektiv. Es folgt die Injektivität von φ , denn das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} K[x]/I & \xrightarrow{\varphi} & L[x]/IL[x] \\ & \searrow \sigma & \uparrow \Phi \\ & & K[x]/I \otimes L \end{array}$$

2.13.13. Korollar. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Seien $f_1, \dots, f_s \in K[x]$ und sei $(f_1, \dots, f_s)$ ein Primideal in $L[x]$. Dann ist $(f_1, \dots, f_s)$ ein Primideal in $K[x]$. ■

Im Folgenden sei $\bar{K}$ der algebraische Abschluss des Körpers K .

2.13.14. Proposition. Seien $f_1, \dots, f_s \in K[\mathbf{x}]$ und $g_1, \dots, g_r \in K[\mathbf{y}]$ Polynome. Sind die Ideale $(f_1, \dots, f_s) \subset \overline{K}[\mathbf{x}]$ und $(g_1, \dots, g_r) \subset \overline{K}[\mathbf{y}]$ Primideale, so ist das Ideal $(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_r)$ ein Primideal in dem Polynomring $K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Beweis. Das folgt aus Satz 2.13.7 und Korollar 2.13.13. ■

2.13.15. Definition. Sei $\overline{K}$ der algebraische Abschluss eines Körpers K . Ein Primideal $P \subset K[\mathbf{x}]$ heißt *stabil*, falls die Extension $P\overline{K}[\mathbf{x}]$ unter der Inklusion $K[\mathbf{x}] \rightarrow \overline{K}[\mathbf{x}]$ ebenfalls ein Primideal ist.

2.13.16. Beispiel. Das Primideal $(x^2 + x + 1) \subset \mathbb{Q}[x]$ ist nicht stabil, da das Polynom $x^2 + x + 1$ in dem Polynomring $\overline{\mathbb{Q}}[x]$ nicht irreduzibel ist.

2.13.17. Satz. Seien $I \subsetneq K[\mathbf{x}]$ und $J \subsetneq K[\mathbf{y}]$ echte Ideale mit der Eigenschaft, dass ihre minimalen Primideale stabil sind. Dann ist jedes minimale Primideal von $I + J$ von der Form $P + Q$ für minimale Primideale $I \subseteq P \subset K[\mathbf{x}]$ und $J \subseteq Q \subset K[\mathbf{y}]$.

Beweis. Sei $M \subset K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ ein minimales Primideal von $I + J$. Aus Proposition 2.13.2 folgt $I \subseteq M \cap K[\mathbf{x}]$ und $J \subseteq M \cap K[\mathbf{y}]$. Es gibt daher minimale Primideale $P \subset K[\mathbf{x}]$ von I und $Q \subset K[\mathbf{y}]$ von J mit $I \subseteq P \subseteq M \cap K[\mathbf{x}]$ und $J \subseteq Q \subseteq M \cap K[\mathbf{y}]$. Es folgt $I + J \subseteq P + Q \subseteq M$. Da P und Q stabil sind, folgt aus Proposition 2.13.14, dass die Summe $P + Q$ ein Primideal in $K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ ist. Es folgt $P + Q = M$ wegen der Minimalität von M . ■

Kapitel 3

Gemischte Binomkantenideale

*Mathematik ist ein Spiel, das nach
bestimmten einfachen Regeln mit
bedeutungslosen Markierungen auf dem
Papier gespielt wird.*
(David Hilbert)

3.1. Definition

Sei K ein Körper und $S = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ der Polynomring in $2n$ Variablen. Im Folgenden untersuchen wir Ideale, die von Binomen der Form $f_{ab} = x_a y_b - x_b y_a$ und $g_{ab} = x_a x_b - y_a y_b$ für $a, b \in \{1, \dots, n\}$ erzeugt werden.

3.1.1. Definition. Sei $G = (V, E_0, E_1)$ ein Graph mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$ und zwei verschiedenen Sorten von Kanten $E_0 \subseteq \binom{V}{2}$ und $E_1 \subseteq \binom{V}{2}$. Das Ideal

$$I_G = (f_{ab} : \{a, b\} \in E_0) + (g_{ab} : \{a, b\} \in E_1)$$

heißt das von G erzeugte *gemischte Binomkantenideal*. Die Kanten in der Menge E_0 heißen *gerade* und die Kanten in der Menge E_1 heißen *ungerade*.

3.1.2. Beispiel. Wir betrachten den Graphen $G = ([4], E_0, E_1)$ mit den Kantenmengen $E_0 = \{23, 24, 34\}$ und $E_1 = \{12, 13, 23, 34\}$, der in Abbildung 3.1 dargestellt ist. Die drei durchgezogenen Kanten sind gerade und die vier gestrichelten Kanten sind ungerade. Das von G erzeugte gemischte Binomkantenideal ist das Ideal $I_G = (f_{23}, f_{24}, f_{34}, g_{12}, g_{13}, g_{23}, g_{34})$.

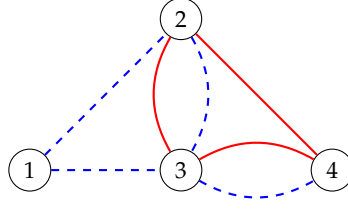


Abbildung 3.1: Ein Graph mit zwei verschiedenen Sorten Kanten.

Gibt es keine ungeraden Kanten, so ist I_G das zu dem Graphen (V, E_0) zugehörige *binomial edge ideal*. Solche Ideale wurden erstmals 2009 unabhängig voneinander in [Herzog et al., 2009] und [Ohtani, 2009] untersucht. Wenn es keine geraden Kanten gibt, so ist I_G das zu dem Graphen (V, E_1) zugehörige *parity binomial edge ideal*. Diese Sorte von Idealen wurde 2016 in [Kahle et al., 2016b] untersucht. Des Weiteren wurden diese Ideale in der Dissertation [Windisch, 2016] behandelt. Im Folgenden wird gezeigt, dass gemischte Binomkantenideale eine passende Verallgemeinerung von binomial edge ideals und parity binomial edge ideals darstellen. Die Idee, Ideale zu betrachten, die von zwei verschiedenen Typen von Binomen erzeugt werden, stammt von Dr. Philipp Korell. Er hat bemerkt, dass sich die Beweise aus [Kahle et al., 2016b] weitestgehend auf gemischte Binomkantenideale verallgemeinern lassen. Die Aussagen, die man auf diese Weise erhält, enthalten Aussagen über binomial edge ideals als Spezialfälle. Diese Beobachtung wird im Folgenden ausgearbeitet.

3.2. Elementare Eigenschaften

Zunächst leiten wir einige einfache Gleichungen her, die im weiteren Verlauf der Arbeit nützlich sein werden. Es gilt $g_{ab} = g_{ba}$ und $f_{ab} = -f_{ba}$. Außerdem gilt $f_{aa} = 0$ und $g_{aa} = x_a^2 + y_a^2$. Die zwei verschiedenen Arten von Binomen f_{ab} und g_{ab} hängen auf folgende Weise miteinander zusammen.

3.2.1. Lemma. Für alle $a, b, c \in \{1, \dots, n\}$ gelten die folgenden Gleichungen:

- | | |
|---|--|
| (i) $x_b f_{ac} = x_c f_{ab} + x_a f_{bc},$ | (v) $x_b f_{ac} = y_c g_{ab} - y_a g_{bc},$ |
| (ii) $y_b f_{ac} = y_c f_{ab} + y_a f_{bc},$ | (vi) $y_b f_{ac} = x_c g_{ab} - x_a g_{bc},$ |
| (iii) $x_b g_{ac} = x_c g_{ab} - y_a f_{bc},$ | (vii) $x_b g_{ac} = y_c f_{ab} + x_a g_{bc},$ |
| (iv) $y_b g_{ac} = y_c g_{ab} - x_a f_{bc},$ | (viii) $y_b g_{ac} = x_c f_{ab} + y_a g_{bc}.$ |

3.2.2. Notation. Für eine Zahl $b \in \{1, \dots, n\}$ sei Φ_b der Isomorphismus $S \rightarrow S$ mit $x_b \mapsto y_b$ und $y_b \mapsto x_b$. Es gelten die Gleichungen $\Phi_b(f_{ab}) = g_{ab}$ und $\Phi_b(f_{bc}) = -g_{bc}$. Im Folgenden sei $t_a \in \{x_a, y_a\}$ für $a \in \{1, \dots, n\}$. Wir schreiben $\bar{t}_a = \Phi_a(t_a)$. Es gilt daher $\bar{x}_a = y_a$ und $\bar{y}_a = x_a$. Des Weiteren sei Ψ_{ab} der Isomorphismus $S \rightarrow S$ mit $x_a \mapsto x_b$, $x_b \mapsto x_a$, $y_a \mapsto y_b$ und $y_b \mapsto y_a$. Es gelten die Gleichungen $\Psi_{ab}(g_{ab}) = g_{ab}$ und $\Psi_{ab}(f_{ab}) = -f_{ab}$.

Beweis von Lemma 3.2.1. Für $t_c \in \{x_c, y_c\}$ und $t_a \in \{x_a, y_a\}$ gilt die Gleichung $t_c f_{ab} + t_a f_{bc} = t_c x_a y_b - t_c x_b y_a + t_a x_b y_c - t_a x_c y_b$. Für $t = x$ folgt $x_c f_{ab} + x_a f_{bc} = -x_c x_b y_a + x_a x_b y_c = x_b f_{ac}$ und damit Gleichung (i). Für $t = y$ folgt $x_c f_{ab} + x_a f_{bc} = y_c x_a y_b - y_a x_c y_b = y_b f_{ac}$ und damit Gleichung (ii). Es gilt daher die Gleichung $t_b f_{ac} = t_c f_{ab} + t_a f_{bc}$. Durch Anwendung von Φ_a, Φ_b, Φ_c auf beiden Seiten der Gleichung folgen jeweils die Gleichungen $t_b g_{ac} = t_c g_{ab} - \bar{t}_a f_{bc}$, $t_b f_{ac} = \bar{t}_c g_{ab} - \bar{t}_a g_{bc}$, $t_b g_{ac} = \bar{t}_c f_{ab} + \bar{t}_a g_{bc}$ und damit die Gleichungen (iii) bis (viii). ■

3.2.3. Lemma. Für alle $a, b \in \{1, \dots, n\}$ gelten die folgenden Gleichungen:

- (i) $f_{ab} = -x_b(x_a + y_a) + x_a(x_b + y_b)$, (v) $f_{ab} = x_b(x_a - y_a) - x_a(x_b - y_b)$,
- (ii) $f_{ab} = y_b(x_a + y_a) - y_a(x_b + y_b)$, (vi) $f_{ab} = y_b(x_a - y_a) - y_a(x_b - y_b)$,
- (iii) $g_{ab} = x_b(x_a + y_a) - y_a(x_b + y_b)$, (vii) $g_{ab} = x_b(x_a - y_a) + y_a(x_b - y_b)$,
- (iv) $g_{ab} = -y_b(x_a + y_a) + x_a(x_b + y_b)$, (viii) $g_{ab} = y_b(x_a - y_a) + x_a(x_b - y_b)$.

Beweis. Die Aussagen (i) und (v) folgen aus $f_{ab} = x_a y_b + x_a x_b - x_a x_b - x_b y_a$. Die Äquivalenzen (i) $\Leftrightarrow$ (ii) und (v) $\Leftrightarrow$ (vi) folgen durch Anwenden des Isomorphismus $-\Phi_a \Phi_b$, denn es gilt $-\Phi_a \Phi_b(f_{ab}) = f_{ab}$. Die Äquivalenzen (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) und (vii) $\Leftrightarrow$ (viii) folgen durch Anwenden des Isomorphismus Ψ_{ab} . Des Weiteren folgen die Äquivalenzen (i) $\Leftrightarrow$ (iv) und (v) $\Leftrightarrow$ (viii) durch Anwenden des Isomorphismus Φ_b . ■

3.2.4. Lemma. Für alle $a, b \in \{1, \dots, n\}$ gelten die folgenden Gleichungen:

- (i) $g_{ab} + f_{ab} = (x_a - y_a)(x_b + y_b)$,
- (ii) $g_{ab} - f_{ab} = (x_a + y_a)(x_b - y_b)$.

Beweis. Aussage (i) folgt zum Beispiel, indem man Gleichungen (i) und (iii) aus Lemma 3.2.3 zusammenaddiert. Durch Anwenden des Isomorphismus Ψ_{ab} folgt die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (ii). ■

3.3. Kantenzüge

In diesem Abschnitt leiten wir ein kombinatorisches Kriterium dafür her, dass bestimmte Binome in einem gemischten Binomkantenideal enthalten sind. Dafür definieren wir zunächst den Begriff des Kantenzugs.

3.3.1. Definition. Ein (v_0, v_l) -Kantenzug P der Länge l ist eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, \dots, v_l) \in V^{l+1}$ und ein Vektor $x \in \{0, 1\}^l$ mit der Eigenschaft $\{v_i, v_{i+1}\} \in E_{x_i}$ für alle $i = 0, 1, \dots, l-1$. Der Kantenzug P heißt (un)gerade, falls die Summe $|x|_1 = \sum_{i=1}^l x_i$ (un)gerade ist. Das Innere des Kantenzugs P ist die Menge $\text{int}(P) = \{v_0, v_1, \dots, v_l\} \setminus \{v_0, v_l\}$.

3.3.2. Satz. Sei P ein (a, b) -Kantenzug in G . Für $v \in \text{int}(P)$ sei $t_v \in \{x_v, y_v\}$. Wir betrachten das Monom $u = \prod_{v \in \text{int}(P)} t_v$.

- (i) Ist P gerade, so gilt $u f_{ab} \in I_G$;
- (ii) Ist P ungerade, so gilt $u g_{ab} \in I_G$.

Beweis. Sei l die Länge des Kantenzugs P . Für $l = 1$ ist die Aussage klar. Sei $l > 1$. Ist $\text{int}(P) = \emptyset$, so bleibt die Aussage klar. Sei also $v \in \text{int}(P)$. Dann teilt P sich auf in einen (a, b) -Kantenzug P' und einen (b, c) -Kantenzug P'' von jeweils kürzerer Länge. Sind P und P' gerade, so ist auch P'' gerade. Es gilt $\text{int}(P') \subseteq \text{int}(P) \setminus \{v\}$ und $\text{int}(P'') \subseteq \text{int}(P) \setminus \{v\}$. Per Induktion folgt $(u/t_v) f_{av} \in I_G$ und $(u/t_v) f_{vb} \in I_G$. Aus Lemma 3.2.1 folgt die Gleichung $t_v f_{ab} = t_b f_{av} + t_a f_{vb}$ und damit $u f_{av} = t_b (u/t_v) f_{av} + t_a (u/t_v) f_{vb} \in I_G$. Die anderen drei Fälle ergeben sich analog, indem man die anderen Gleichungen aus Lemma 3.2.1 benutzt. ■

3.3.3. Bemerkung. Proposition 3.3.2 ist nicht richtig, wenn man Graphen mit Schleifen betrachtet. Sei $G = (\{1, 2\}, \emptyset, \{11, 12\})$ der Graph aus Abbildung 3.2. Das von G erzeugte gemischte Binomkantenideal ist das Ideal $I_G = (g_{11}, g_{12})$. Der $(1, 2)$ -Kantenzug $P = (1, 1, 2)$ ist gerade und es gilt $\text{int}(P) = \emptyset$. Allerdings gilt $f_{12} = x_1 y_2 - x_2 y_1 \notin I_G$.

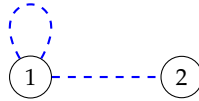


Abbildung 3.2: Ein Graph mit einer Schleife.

3.4. Gröbnerbasis

*Ich habe das symbolische Rechnen mit Stumpf
und Stil verlernt.
(Emmy Noether)*

Im Folgenden sei $<$ die lexikographische Monomordnung auf S , die durch $x_1 > x_2 > \dots > x_n > y_1 > y_2 > \dots > y_n$ induziert wird. In diesem Abschnitt berechnen wir eine aus Binomen bestehende Gröbnerbasis des gemischten Binomkantenideals I_G bezüglich dieser Monomordnung. Dafür wird Lemma 2.2.3 ein wichtiges Hilfsmittel sein.

3.4.1. Definition. Sei B die Menge aller Binome aus Satz 3.3.2.

Die Menge B enthält daher für jeden geraden (a, b) -Kantenzug P die Binome uf_{ab} und für jeden ungeraden (c, d) -Kantenzug Q die Binome ug_{cd} , wobei $u = \prod_{v \in \text{int}(P)} t_v$ alle möglichen Monome durchläuft mit $t_v \in \{x_v, y_v\}$. Die Menge B ist endlich und aus Satz 3.3.2 folgt $B \subseteq I_G$.

3.4.2. Satz. Die Menge B ist eine Gröbnerbasis von I_G .

Wir beweisen diesen Satz, indem wir zeigen, dass Buchbergers Kriterium 2.2.13 erfüllt ist. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

3.4.3. Satz. Seien $b, b' \in B$. Dann gilt $S(b, b') \rightarrow_B 0$.

Wir teilen den Beweis von Satz 3.4.3 in drei Lemmata auf. Im Folgenden sei P ein (a, b) -Kantenzug und Q ein (c, d) -Kantenzug. Seien $\text{int}(P) = P^x \cup P^y$ und $\text{int}(Q) = Q^x \cup Q^y$ disjunkte Zerlegungen. Wir definieren die Monome $u = \prod_{i \in P^x} x_i \prod_{i \in P^y} y_i$ und $v = \prod_{i \in Q^x} x_i \prod_{i \in Q^y} y_i$.

3.4.4. Lemma. Seien P und Q gerade. Dann gilt $S(uf_{ab}, vf_{cd}) \rightarrow_B 0$.

Beweis. Das S -Polynom erfüllt für alle Polynome f und g die Gleichungen $S(f, g) = S(-f, g) = S(f, -g) = S(-f, -g)$. Wegen der Gleichungen $f_{ab} = -f_{ba}$ und $f_{cd} = -f_{dc}$ können wir daher stets $a < b$ und $c < d$ annehmen. Insbesondere gilt $\text{LM}(f_{ab}) = x_a y_b$ und $\text{LM}(f_{cd}) = x_c y_d$. Des Weiteren gilt für alle Polynome f und g die Gleichung $S(f, g) = -S(g, f)$. Deshalb können wir auch $a \leq c$ annehmen. Wir betrachten das quadratfreie Monom

$$w = \frac{\text{lcm}(u x_a y_b, v x_c y_d)}{\text{lcm}(x_a y_b, x_c y_d)}$$

aus Lemma 2.2.3. Wir schreiben $w = \prod_{i \in X} x_i \prod_{i \in Y} y_i$ und unterscheiden drei Fälle:

- (i) Seien $\text{LM}(f_{ab})$ und $\text{LM}(f_{cd})$ teilerfremd. Das bedeutet $a < c$ und $b \neq d$. In diesem Fall gilt $X = P^x \setminus \{c\} \cup Q^x \setminus \{a\}$ und $Y = P^y \setminus \{d\} \cup Q^y \setminus \{b\}$. Mit Lemma 2.2.3 und Lemma 2.2.7 gilt die Standarddarstellung

$$S(uf_{ab}, vf_{cd}) = wS(f_{ab}, f_{cd}) = wx_d y_c f_{ab} - wx_b y_a f_{cd}.$$

Beide Summanden sind das Produkt von einem Binom aus B mit einem Monom. Deshalb gilt $S(uf_{ab}, vf_{cd}) \rightarrow_B 0$.

- (ii) Angenommen, es gilt $a = c$. In diesem Fall gilt $X = P^x \cup Q^x$ und $Y = P^y \setminus \{d\} \cup Q^y \setminus \{b\}$. Aus Lemma 2.2.3 und Lemma 3.2.1 (ii) folgt

$$S(uf_{ab}, vf_{ad}) = wS(f_{ab}, f_{ad}) = w(y_d f_{ab} - y_b f_{ad}) = wy_a f_{db}.$$

Da die Konkatenation von P und Q ein gerader (d, b) -Kantenzug ist, folgt $wy_a f_{db} \in B$ und damit $S(uf_{ab}, vf_{ad}) \rightarrow_B 0$.

- (iii) Angenommen, es gilt $b = d$. In diesem Fall gilt $X = P^x \setminus \{c\} \cup Q^x \setminus \{a\}$ und $Y = P^y \cup Q^y$. Aus Lemma 2.2.3 und Lemma 3.2.1 (i) folgt

$$S(uf_{ab}, vf_{cb}) = wS(f_{ab}, f_{cb}) = w(x_c f_{ab} - x_a f_{cb}) = wx_b f_{ac}$$

und damit $S(uf_{ab}, vf_{cb}) \rightarrow_B 0$. ■

3.4.5. Beispiel. Wir betrachten den in Abbildung 3.3 dargestellten Graphen $G = ([5], E_0, \emptyset)$ mit den geraden Kanten $E_0 = \{13, 14, 15, 23, 34\}$. Sei P der $(1, 3)$ -Kantenzug $(1, 4, 3)$ und Q der $(2, 5)$ -Kantenzug $(2, 3, 1, 5)$. Sei $u = y_4$ und $v = x_1 y_3$. Es gilt also $P^x = \emptyset$, $P^y = \{4\}$, $Q^x = \{1\}$ und $Q^y = \{3\}$. Es folgt $X = \emptyset$, $Y = \{4\}$ und somit $w = y_4$. Es gilt $S(y_4 f_{13}, x_1 y_3 f_{25}) = x_5 y_2 y_4 f_{13} - x_3 y_1 y_4 f_{25}$. Es gilt $y_4 f_{13} \in B$ und $x_3 y_1 f_{25} \in B$. Also folgt $S(uf_{13}, vf_{25}) \rightarrow_B 0$.

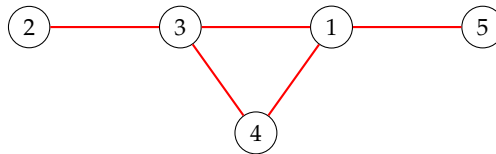


Abbildung 3.3: Der Graph aus Beispiel 3.4.5.

3.4.6. Lemma. Sei P gerade und Q ungerade. Dann gilt $S(uf_{ab}, vg_{cd}) \rightarrow_B 0$.

Beweis. Wir können $a < b$ annehmen. Es gilt also $\text{LM}(f_{ab}) = x_a y_b$ und $\text{LM}(g_{cd}) = x_c x_d$. Wir betrachten das quadratfreie Monom

$$w = \frac{\text{lcm}(u x_a y_b, v x_c x_d)}{\text{lcm}(x_a y_b, x_c x_d)}$$

aus Lemma 2.2.3. Wir schreiben $w = \prod_{i \in X} x_i \prod_{i \in Y} y_i$ und unterscheiden zwei Fälle:

- (i) Seien $\text{LM}(f_{ab})$ und $\text{LM}(g_{cd})$ teilerfremd. Das bedeutet $a \neq c$ und $a \neq d$. In diesem Fall gilt $X = P^x \setminus \{c, d\} \cup Q^x \setminus \{a\}$ und $Y = P^y \cup Q^y \setminus \{b\}$. Mit Lemma 2.2.3 und Lemma 2.2.7 gilt die Standarddarstellung

$$S(u f_{ab}, v g_{cb}) = w S(f_{ab}, g_{cb}) = w y_c y_d f_{ab} - w x_b y_a g_{cd}$$

und damit $S(u f_{ab}, v g_{cb}) \rightarrow_B 0$.

- (ii) Seien $\text{LM}(f_{ab})$ und $\text{LM}(g_{cd})$ nicht teilerfremd. Dann gilt $a = c$ oder $a = d$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $a = c$. In diesem Fall gilt $X = P^x \setminus \{d\} \cup Q^x$ und $Y = P^y \cup Q^y \setminus \{b\}$. Aus Lemma 2.2.3 und Lemma 3.2.1 (viii) folgt

$$S(u f_{ab}, v g_{ad}) = w S(f_{ab}, g_{ad}) = w (x_d f_{ab} - y_b g_{ad}) = -w y_a g_{bd}.$$

Da die Konkatenation von P und Q ein ungerader (b, d) -Kantenzug ist, folgt $-w y_a g_{bd} \in B$ und damit $S(u f_{ab}, v g_{ad}) \rightarrow_B 0$. ■

3.4.7. Lemma. Seien P und Q ungerade. Dann gilt $S(u g_{ab}, v g_{cd}) \rightarrow_B 0$.

Beweis. Wir können $a \leq b$, $c \leq d$ und $a \leq c$ annehmen. Wir betrachten das quadratfreie Monom

$$w = \frac{\text{lcm}(u x_a x_b, v x_c x_d)}{\text{lcm}(x_a x_b, x_c x_d)}$$

aus Lemma 2.2.3. Wir schreiben $w = \prod_{i \in X} x_i \prod_{i \in Y} y_i$ und unterscheiden zwei Fälle:

- (i) Angenommen, $\text{LM}(g_{ab})$ und $\text{LM}(g_{cd})$ sind teilerfremd. In diesem Fall gilt $X = P^x \setminus \{c, d\} \cup Q^x \setminus \{a, b\}$ und $Y = P^y \cup Q^y$. Mit Lemma 2.2.3 und Lemma 2.2.7 gilt die Standarddarstellung

$$S(u g_{ab}, v g_{cb}) = w S(g_{ab}, g_{cb}) = w y_c y_d g_{ab} - w y_a y_b g_{cd}$$

und damit $S(u g_{ab}, v g_{cb}) \rightarrow_B 0$.

- (ii) Angenommen, $\text{LM}(g_{ab})$ und $\text{LM}(g_{cd})$ sind nicht teilerfremd. Wir können uns auf den Fall beschränken, dass genau eine Variable übereinstimmt. Angenommen, es gilt $a \neq c$. In diesem Fall gilt $X = P^x \setminus \{c\} \cup Q^x \setminus \{a\}$ und $Y = P^y \cup Q^y$. Aus Lemma 2.2.3 und Lemma 3.2.1 (vi) folgt

$$S(ug_{ab}, vg_{bc}) = wS(g_{ab}, g_{bc}) = w(x_c g_{ab} - x_a g_{bc}) = wy_b f_{ac}.$$

Da die Konkatenation von P und Q ein gerader (a, c) -Kantenzug ist, folgt $wy_b f_{ac} \in B$ und damit $S(ug_{ab}, vg_{bc}) \rightarrow_B 0$. ■

3.5. Reduzierte Gröbnerbasis

In diesem Abschnitt geben wir die reduzierte Gröbnerbasis des Ideals I_G bezüglich der Monomordnung $<$ an. Sie hat dieselbe Gestalt wie die reduzierte Gröbnerbasis in [Kahle et al., 2016b]. Eine wichtige Beobachtung ist, dass sie die reduzierte Gröbnerbasis aus [Herzog et al., 2009] als Spezialfall enthält.

3.5.1. Notation. Sei $V' \subseteq V$ eine Teilmenge der Knotenmenge. Wir bezeichnen mit $G[V']$ den von V' induzierten Untergraphen (V', E'_0, E'_1) mit Kantenmengen $E'_0 = \binom{V'}{2} \cap E_0$ und $E'_1 = \binom{V'}{2} \cap E_1$. Für eine Folge von Knoten $P = (v_1, \dots, v_l) \in V^l$ definieren wir $G[P] = G[\{v_1, \dots, v_l\}]$.

3.5.2. Definition. Sei P ein gerader (a, b) -Kantenzug mit $a < b$. Sei u das Monom $\prod_{v \in \text{int}(P)} t_v$ mit $t_v \in \{x_v, y_v\}$ für alle $v \in \text{int}(P)$. Das Binom $uf_{ab} \in B$ heißt *reduziert*, falls die folgenden Eigenschaften für alle $v \in \text{int}(P)$ gelten:

- (i) Es gibt keinen geraden (a, b) -Kantenzug in $G[P \setminus \{v\}]$,
- (ii) Falls $v < a$, so gilt $t_v = y_v$,
- (iii) Falls $a < v < b$, so sind alle (a, v) -Kantenzüge in $G[P]$ ungerade und es gilt $t_v = y_v$,
- (iv) Falls $b < v$, so sind entweder alle (a, v) -Kantenzüge in $G[P]$ gerade und es gilt $t_v = x_v$, oder alle (a, v) -Kantenzüge in $G[P]$ sind ungerade und es gilt $t_v = y_v$.

In diesem Fall heißt der Kantenzug P ebenfalls *reduziert*.

Sei P ein gerader reduzierter (a, b) -Kantenzug und uf_{ab} das korrespondierende reduzierte Binom. Wir definieren die Mengen

$$P^x = \{v \in \text{int}(P) : b < v \text{ und es gibt einen geraden } (a, v)\text{-Kantenzug in } G[P]\}$$

und $P^y = \text{int}(P) \setminus P^x$. Für das Monom u gilt dann $u = \prod_{v \in P^x} x_v \prod_{v \in P^y} y_v$.

3.5.3. Beispiel. Wir betrachten den Graphen $G = ([5], \{12, 45\}, \{13, 35\})$ aus Abbildung 3.4. Der gerade $(2, 4)$ -Kantenzug $P = (2, 1, 3, 5, 4)$ ist reduziert. Das korrespondierende reduzierte Binom ist $x_5 y_1 y_3 f_{24}$.

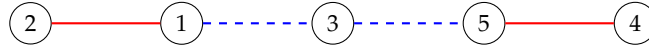


Abbildung 3.4: Der Graph aus Beispiel 3.5.3.

3.5.4. Definition. Sei P ein ungerader (a, b) -Kantenzug mit $a \leq b$. Sei u das Monom $\prod_{v \in \text{int}(P)} t_v$ mit $t_v \in \{x_v, y_v\}$ für alle $v \in \text{int}(P)$. Das Binom $u g_{ab} \in B$ heißt *reduziert*, falls die folgenden Eigenschaften für alle $v \in \text{int}(P)$ gelten:

- (i) Es gibt keinen ungeraden (a, b) -Kantenzug in $G[P \setminus \{v\}]$,
- (ii) Es gilt $v < b$ und $t_v = y_v$,
- (iii) Falls $a < v < b$, so sind alle (a, v) -Kantenzüge in $G[P]$ ungerade.

In diesem Fall heißt der Kantenzug P ebenfalls *reduziert*.

Sei P ein ungerader reduzierter (a, b) -Kantenzug und $u g_{ab}$ das korrespondierende reduzierte Binom. Für das Monom u gilt dann $u = \prod_{v \in \text{int}(P)} y_v$.

3.5.5. Beispiel. Wir betrachten den Graphen $G = ([5], \{34\}, \{13, 15, 24\})$ aus Abbildung 3.5. Der ungerade $(2, 5)$ -Kantenzug $P = (2, 4, 3, 1, 5)$ ist reduziert. Das korrespondierende reduzierte Binom ist $y_1 y_3 y_4 g_{25}$.

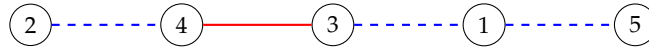


Abbildung 3.5: Der Graph aus Beispiel 3.5.5.

3.5.6. Definition. Sei $R \subseteq B$ die Menge der reduzierten Binome.

3.5.7. Satz. Die Menge der reduzierten Binome R ist eine Gröbnerbasis von I_G .

3.5.8. Lemma. Sei $u f_{ab} \in B$. Dann gilt $u f_{ab} \rightarrow_R 0$.

Beweis. Der Beweis ist eine Induktion nach der Länge l des Kantenzuges P . Der Fall $l = 1$ ist klar. Sei also $l > 1$. Sei $u f_{ab}$ nicht reduziert und $v \in \text{int}(P)$ ein Knoten, der nicht alle Eigenschaften aus Definition 3.5.2 erfüllt. Wenn Eigenschaft (i) aus Definition 3.5.2 verletzt ist, so ist das Binom $u f_{ab}$ das Produkt von einem Monom mit einem Binom, das zu einem kürzeren geraden (a, b) -Kantenzug korrespondiert. Dieses Binom reduziert sich per Induktion zu 0 modulo R . Sei also Eigenschaft (i) erfüllt. Wir unterscheiden drei Fälle:

- (i) Sei $v < a$. Dann ist Eigenschaft (ii) nicht erfüllt und es gilt $t_v = x_v$. Angenommen, es gibt einen geraden (a, v) -Kantenzug P' in $G[P]$. Da P gerade ist, gibt es einen geraden (v, b) -Kantenzug P'' in $G[P]$. Die Gleichung $x_v f_{ab} = x_b f_{av} + x_a f_{vb}$ ist eine Standarddarstellung, denn es gilt $\text{LM}(x_v f_{ab}) = x_v x_a y_b$, $\text{LM}(x_b f_{av}) = x_v x_b y_a$ und $\text{LM}(x_a f_{vb}) = x_v x_a y_b$. Mit $u' = u/x_v$ gilt die Standarddarstellung $u f_{ab} = u' x_b f_{av} + u' x_a f_{vb}$. Die Summanden sind jeweils das Produkt von einem Monom mit einem Binom in B . Die Kantenzüge P' und P'' haben kürzere Länge als P . Deshalb folgt per Induktion $u f_{ab} \rightarrow_R 0$.

Angenommen, es gibt einen ungeraden (a, v) -Kantenzug in $G[P]$. Da P gerade ist, gibt es einen ungeraden (v, b) -Kantenzug in $G[P]$. Die Gleichung $x_v f_{ab} = y_b g_{av} - y_a g_{vb}$ ist eine Standarddarstellung, denn es gilt $\text{LM}(x_v f_{ab}) = x_v x_a y_b$, $\text{LM}(y_b g_{av}) = x_v x_a y_b$ und $\text{LM}(y_a g_{vb}) = x_v x_b y_a$. Mit derselben Argumentation wie oben folgt per Induktion $u f_{ab} \rightarrow_R 0$.

- (ii) Sei $a < v < b$. Dann ist Eigenschaft (iii) nicht erfüllt. Angenommen, es gibt einen geraden (a, v) -Kantenzug. Da P gerade ist, gibt es einen geraden (v, b) -Kantenzug. Die Gleichung $t_v f_{ab} = t_b f_{av} + t_a f_{vb}$ ist eine Standarddarstellung, denn es gilt $\text{LM}(t_v f_{ab}) = x_a t_v y_b$, $\text{LM}(t_b f_{av}) = x_a y_v t_b$ und $\text{LM}(t_a f_{vb}) = t_a x_v y_b$ für $t_v \in \{x_v, y_v\}$.

Angenommen, alle (a, v) -Kantenzug in $G[P]$ sind ungerade. Da Eigenschaft (iii) nicht erfüllt ist, gilt $t_v = x_v$. Da P gerade ist, gibt es einen ungeraden (v, b) -Kantenzug. Die Gleichung $x_v f_{ab} = y_b g_{av} - y_a g_{vb}$ ist eine Standarddarstellung, denn es gilt $\text{LM}(x_v f_{ab}) = x_a x_v y_b$, $\text{LM}(y_b g_{av}) = x_a x_v y_b$ und $\text{LM}(y_a g_{vb}) = x_v x_b y_a$. In beiden Fällen folgt per Induktion $u f_{ab} \rightarrow_R 0$.

- (iii) Sei $b < v$. Dann ist Eigenschaft (iv) nicht erfüllt. Angenommen, es gilt $t_v = x_v$. Dann gibt es einen ungeraden (a, v) -Kantenzug. Die Gleichung $x_v f_{ab} = y_b g_{av} - y_a g_{vb}$ ist wegen $\text{LM}(x_v f_{ab}) = x_a x_v y_b$, $\text{LM}(y_b g_{av}) = x_a x_v y_b$ und $\text{LM}(y_a g_{vb}) = x_b x_v y_a$ eine Standarddarstellung.

Angenommen, es gilt $t_v = y_v$. Dann gibt es einen geraden (a, v) -Kantenzug. Die Gleichung $y_v f_{ab} = y_b f_{av} + y_a f_{vb}$ ist wegen $\text{LM}(y_v f_{ab}) = x_a y_v y_b$, $\text{LM}(y_b f_{av}) = x_a y_v y_b$ und $\text{LM}(y_a f_{vb}) = x_v y_a y_b$ eine Standarddarstellung. In beiden Fällen folgt per Induktion $u f_{ab} \rightarrow_R 0$. ■

3.5.9. Lemma. Sei $u g_{ab} \in B$. Dann gilt $u g_{ab} \rightarrow_R 0$.

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 3.5.8, indem man für einen Knoten $v \in \text{int}(P)$ die Darstellungen $t_v g_{ab} = t_b g_{av} - \bar{t}_a f_{vb}$ und $t_v g_{ab} = \bar{t}_b f_{av} + t_a g_{vb}$ aus Lemma 3.2.1 benutzt. ■

Beweis von Satz 3.5.7. Seien $r, r' \in R$ reduzierte Binome. Aus Satz 3.4.3 folgt $S(r, r') \rightarrow_B 0$. Des Weiteren folgt $b \rightarrow_R 0$ für alle $b \in B$ aus den Lemmata 3.5.8 und 3.5.9. Deshalb folgt $S(r, r') \rightarrow_R 0$. Aus Buchbergers Kriterium 2.2.13 folgt, dass die Menge der reduzierten Binome R eine Gröbnerbasis des Ideals I_G bezüglich der Monomordnung $<$ ist. ■

Die verbleibende Aufgabe besteht darin zu zeigen, dass die Menge R nach Definition 2.2.14 reduziert ist. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

3.5.10. Satz. *Seien $b, b' \in R$ mit $b \neq b'$. Für alle $u \in \text{supp}(b)$ gilt $\text{LM}(b') \nmid u$.*

Zu betrachten sind vier Fälle: gerade-gerade, gerade-ungerade, ungerade-gerade und ungerade-ungerade, wobei in jedem Fall zwei Monome untersucht werden. Diese Untersuchung erfolgt in den folgenden acht Lemmata.

3.5.11. Lemma. *Seien $uf_{ab}, vf_{cd} \in R$ reduziert mit $\text{LM}(vf_{cd}) \mid \text{LM}(uf_{ab})$. Dann folgt $uf_{ab} = vf_{cd}$.*

Beweis. Sei P der zu dem Binom uf_{ab} korrespondierende reduzierte (a, b) -Kantenzug und Q der zu dem Binom vf_{cd} korrespondierende reduzierte (c, d) -Kantenzug. Es gilt $a < b$ und $c < d$. Aus $vx_c y_d \mid ux_a y_b$ folgt, dass $G[Q]$ ein Teilgraph von $G[P]$ ist. Wir nehmen zunächst $a \neq c$ an. Dann folgt $x_c \mid u$ und somit $c \in P^x$. Da P reduziert ist, folgt $b < c$ und es gibt einen geraden (a, c) -Kantenzug P' in $G[P]$. Insbesondere folgt $b < d$. Es gilt also $y_d \mid u$ und somit $d \in P^y$. Da P reduziert ist, sind alle (a, d) -Kantenzüge in $G[P]$ ungerade. Das ist ein Widerspruch, denn die Konkatenation (P', Q) ist ein gerader (a, d) -Kantenzug. Es gilt also $a = c$. Nun nehmen wir $b \neq d$ an. Wie eben folgt aus $y_d \mid u$ auch $d \in P^y$. Alle (a, d) -Kantenzüge in $G[P]$ sind also ungerade im Widerspruch dazu, dass Q ein gerader (a, d) -Kantenzug ist. Es gilt also $a = c$ und $b = d$. Insbesondere folgt $v \mid u$. Würde nun $v \neq u$ gelten, so wäre Q ein gerader (a, b) -Kantenzug in $G[P \setminus \{i\}]$ für einen Knoten $i \in \text{int}(P)$ im Widerspruch zur Reduziertheit des Kantenzugs P . ■

3.5.12. Lemma. *Seien $uf_{ab}, vf_{cd} \in R$ reduziert. Dann gilt $\text{LM}(vf_{cd}) \nmid ux_b y_a$.*

Beweis. Wir nehmen $\text{LM}(vf_{cd}) \mid ux_b y_a$ an. Sei P der zu dem Binom uf_{ab} korrespondierende reduzierte (a, b) -Kantenzug und Q der zu dem Binom vf_{cd} korrespondierende reduzierte (c, d) -Kantenzug. Es gilt $a < b$ und $c < d$. Aus der Annahme folgt, dass $G[Q]$ ein Teilgraph von $G[P]$ ist. Zunächst nehmen wir an, dass $b \neq c$ gilt. Dann folgt $x_c \mid u$ und damit $c \in P^x$. Es folgt $b < c$ und es gibt einen geraden (a, c) -Kantenzug P' in $G[P]$. Insbesondere folgt $a < d$ und damit $y_d \mid u$ und $d \in P^y$. Alle (a, d) -Kantenzüge in $G[P]$ sind daher ungerade.

Das ist ein Widerspruch, denn der (a, d) -Kantenzug (P', Q) ist gerade. Es gilt also $b = c$. Insbesondere folgt $a < d$. Mit derselben Argumentation wie oben folgt, dass $y_d \mid u$ und damit $d \in P^y$ gilt. Deshalb müssen alle (a, d) -Kantenzüge in $G[P]$ ungerade sein. Das ist ein Widerspruch, denn (P, Q) ist ein gerader (a, d) -Kantenzug. Es folgt $\text{LM}(vf_{cd}) \nmid ux_by_a$. ■

3.5.13. Lemma. Seien $uf_{ab}, vg_{cd} \in R$ reduziert. Dann gilt $\text{LM}(vg_{cd}) \nmid \text{LM}(uf_{ab})$.

Beweis. Sei P der zu dem Binom uf_{ab} korrespondierende reduzierte gerade (a, b) -Kantenzug und Q der zu dem Binom vg_{cd} korrespondierende reduzierte ungerade (c, d) -Kantenzug. Es gilt $a < b$ und $c \leq d$. Wir nehmen $vx_cx_d \mid ux_ay_b$ an. Es folgt, dass $G[Q]$ ein Teilgraph von $G[P]$ ist. Da das Monom ux_ay_b quadratfrei ist, folgt $c < d$. Wir nehmen $c \notin \text{int}(P)$ und $d \notin \text{int}(P)$ an. Dann gilt $c, d \in P^x$ und somit $b < c < d$. Insbesondere gibt es einen geraden (a, c) -Kantenzug P' in $G[P]$. Dann ist (P', Q) ein ungerader (a, d) -Kantenzug im Widerspruch zu $d \in P^x$. Es gilt daher $c = a$ oder $c = d$. Wir nehmen $c = a$ an. Dann gilt $d \in P^x$ im Widerspruch dazu, dass der (a, d) -Kantenzug Q ungerade ist. Es gilt also $c = d$. Dann folgt aber $c \in P^x$ im Widerspruch dazu, dass der (a, c) -Kantenzug Q ungerade ist. Insgesamt folgt $\text{LM}(vg_{cd}) \nmid \text{LM}(uf_{ab})$. ■

3.5.14. Lemma. Seien $uf_{ab}, vg_{cd} \in R$ reduziert. Dann gilt $\text{LM}(vg_{cd}) \nmid ux_by_a$.

Beweis. Dieser Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 3.5.13. ■

3.5.15. Lemma. Seien $ug_{ab}, vf_{cd} \in R$ reduziert. Dann gilt $\text{LM}(vf_{cd}) \nmid \text{LM}(ug_{ab})$.

Beweis. Sei P der zu dem Binom ug_{ab} korrespondierende reduzierte ungerade (a, b) -Kantenzug und Q der zu dem Binom vf_{cd} korrespondierende reduzierte gerade (c, d) -Kantenzug. Es gilt $a \leq b$ und $c < d$. Wir nehmen $vx_cy_d \mid ux_ax_b$ an. Es folgt, dass $G[Q]$ ein Teilgraph von $G[P]$ ist. Es gilt $y_d \mid u$ und damit $d \in P^y$. Aus $u \in K[y_1, \dots, y_n]$ folgt $c = a$ oder $c = b$. Wir nehmen $c = a$ an. Da P ein reduzierter ungerader Kantenzug ist, gilt $d < b$. Da der (a, d) -Kantenzug Q gerade ist, muss sogar $d < a$ gelten im Widerspruch zu $a = c < d$. Es gilt somit $c = b$. Das ist aber ein Widerspruch zu $d \in \text{int}(P)$, denn es gilt $b = c < d$. Es folgt somit $\text{LM}(vf_{cd}) \nmid \text{LM}(ug_{ab})$. ■

3.5.16. Lemma. Seien $ug_{ab}, vf_{cd} \in R$ reduziert. Dann gilt $\text{LM}(vf_{cd}) \nmid uy_ay_b$.

Beweis. Diese Aussage ist klar, denn es gilt $u \in K[y_1, \dots, y_n]$. ■

3.5.17. Lemma. Seien $ug_{ab}, vg_{cd} \in R$ reduziert mit $\text{LM}(vg_{cd}) \mid \text{LM}(ug_{ab})$. Dann folgt $ug_{ab} = vg_{cd}$.

Beweis. Sei P der zu dem Binom ug_{ab} korrespondierende reduzierte (a, b) -Kantenzug und Q der zu dem Binom vg_{cd} korrespondierende reduzierte (c, d) -Kantenzug. Wir nehmen $vx_cx_d \mid ux_ax_b$ an. Es folgt, dass $G[Q]$ ein Teilgraph von $G[P]$ ist. Aus $u \in K[y_1, \dots, y_n]$ folgt $a = c$ und $b = d$. Insbesondere gilt $v \mid u$. Wenn $v \neq u$ gelten würde, gäbe es einen ungeraden (a, b) -Kantenzug in $G[P \setminus \{i\}]$ für einen Knoten $i \in \text{int}(P)$ im Widerspruch zur Reduziertheit von P . ■

3.5.18. Lemma. Seien $ug_{ab}, vg_{cd} \in R$ reduziert. Dann gilt $\text{LM}(vg_{cd}) \nmid uy_ay_b$.

Beweis. Diese Aussage ist klar, denn es gilt $u \in K[y_1, \dots, y_n]$. ■

3.5.19. Satz. Die Menge der reduzierten Binome $R \subseteq B$ ist die reduzierte Gröbnerbasis des Ideals I_G bezüglich der Monomordnung $<$. ■

3.5.20. Beispiel. Wir betrachten den Graphen

$$G = ([6], \{12, 15, 34, 46, 56\}, \{13, 23, 24, 35, 36\})$$

aus Abbildung 3.6. Der $(6, 6)$ -Kantenzug $(6, 5, 1, 2, 4, 6)$ ist ungerade und reduziert. Es gilt daher $y_1y_2y_4y_5g_{66} \in R$. Des Weiteren ist der $(2, 6)$ -Kantenzug $(2, 3, 6)$ gerade und reduziert. Deshalb gilt $y_3f_{26} \in R$. Außerdem ist der $(1, 4)$ -Kantenzug $(1, 5, 6, 4)$ gerade und reduziert. Es folgt $x_5x_6f_{14} \in R$. Es gilt $|R| = 26$. Es gibt daher 26 reduzierte Kantenzüge in G . Neben den ursprünglichen Erzeugern von I_G enthält R die folgenden weiteren 16 Binome:

$$\begin{aligned} & y_3y_4g_{66}, y_1y_2y_4y_5g_{66}, y_3y_4g_{56}, y_1y_2y_4g_{56}, x_6f_{45}, y_3g_{46}, y_3g_{45}, \\ & y_1y_2g_{45}, y_3f_{26}, y_3f_{25}, y_1f_{25}, y_4g_{26}, y_3f_{16}, y_3y_4g_{16}, x_5x_6f_{14}, y_3g_{14}. \end{aligned}$$

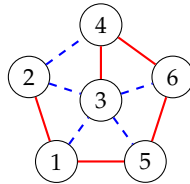


Abbildung 3.6: Der Graph aus Beispiel 3.5.20.

Sei im Folgenden $E_1 = \emptyset$. Der Graph G enthält daher keine ungeraden Kanten. In diesem Fall ist I_G das von G erzeugte binomial edge ideal. In den Arbeiten [Herzog et al., 2009] und [Ohtani, 2009] wurde die reduzierte Gröbnerbasis von I_G ausgerechnet. Wir vergleichen das Ergebnis aus der Arbeit [Herzog et al., 2009] mit Satz 3.5.19. Dafür benötigen wir die folgende Definition.

3.5.21. Definition. Ein (a, b) -Kantenzug $P = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ mit $v_0 = a$ und $v_l = b$ heißt *zulässig*, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

- (i) $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$,
- (ii) Für alle $i = 1, \dots, l-1$ gilt $v_i < a$ oder $b < v_i$,
- (iii) Für jede echte Teilmenge $\{w_1, \dots, w_s\} \subsetneq \{v_1, \dots, v_{l-1}\}$ ist die Folge $(a, w_1, \dots, w_s, b)$ kein (a, b) -Kantenzug.

Sei P ein zulässiger (a, b) -Kantenzug. Dann sei das Monom u_P definiert durch

$$u_P = \prod_{v_i > b} x_{v_i} \prod_{v_i < a} y_{v_i}.$$

Der folgende Satz ist Theorem 2.1 in [Herzog et al., 2009].

3.5.22. Satz. Sei I_G das zu dem Graphen $G = (V, E_0, \emptyset)$ zugehörige binomial edge ideal. Dann ist die Menge

$$\bigcup_{a < b} \{u_P f_{ab} : P \text{ ist ein zulässiger } (a, b)\text{-Kantenzug}\}$$

die reduzierte Gröbnerbasis von I_G bezüglich $<$.

Beweis. Für den Fall $E_1 = \emptyset$ sind die zulässigen (a, b) -Kantenzüge genau die reduzierten geraden (a, b) -Kantenzüge im Sinne von Definition 3.5.2. Sei P ein reduzierter gerader (a, b) -Kantenzug und sei $u f_{ab}$ das korrespondierende reduzierte Binom. Dann gilt $u = u_P$. Die Aussage folgt also aus Satz 3.5.19. ■

3.6. Graverbasis der Saturierung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Saturierung des gemischten Binomkantenideals I_G . Nach den Überlegungen aus Abschnitt 2.6 handelt es sich dabei um ein Gitterideal, das eine zentrale Rolle bei der Bestimmung der minimalen Primideale von I_G in Abschnitt 3.9 spielt.

Zunächst zeigen wir, dass die Saturierung von I_G als Lawrence-Ideal interpretiert werden kann, sodass die in Abschnitt 2.11 entwickelte Theorie angewendet werden kann. Anschließend berechnen wir eine Graver-Basis des zugehörigen Gitters, wobei der Algorithmus von Pottier (Satz 2.5.19) ein hilfreiches Kriterium liefert.

3.6.1. Definition. Sei $J_G = I_G : (xy)^\infty$ die Saturierung des gemischten Binomkantenideals I_G bezüglich des Produkts der Variablen $xy = x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n$.

Sei e_i der i -te kanonische Einheitsvektor in $\mathbb{Z}^n$. Sei L das von der Menge

$$\{e_a - e_b : \{a, b\} \in E_0\} \cup \{e_a + e_b : \{a, b\} \in E_1\}$$

erzeugte Untergitter in $\mathbb{Z}^n$. Wir betrachten die Bijektion aus Satz 2.7.6. Der Vektor $e_a - e_b$ entspricht dem Binom $x_a - x_b$. Mit der Notation aus Abschnitt 2.11 gilt $(x_a - x_b)^\# = x_a y_b - x_b y_a = f_{ab}$. Der Vektor $e_a + e_b$ entspricht dem Binom $x_a x_b - 1$ und es gilt $(x_a x_b - 1)^\# = x_a x_b - y_a y_b = g_{ab}$. Es folgt $J_G = I_{\Lambda(L)} = \Lambda(I_L)$.

3.6.2. Proposition. *Das Ideal J_G ist das Lawrence-Ideal des Gitterideals I_L .* ■

3.6.3. Proposition. *Sei P ein (a, b) -Kantenzug in dem Graphen G .*

- (i) *Ist P gerade, so gilt $e_a - e_b \in L$;*
- (ii) *Ist P ungerade, so gilt $e_a + e_b \in L$.*

Beweis. Sei l die Länge von P . Ist $l = 1$, so ist die Aussage klar. Sei $l > 1$ und $P = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ ein (v_0, v_l) -Kantenzug. Sei P gerade. Ist $\{v_{l-1}, v_l\}$ gerade, so folgt per Induktion $(e_{v_0} - e_{v_{l-1}}) + (e_{v_{l-1}} - e_{v_l}) = e_{v_0} - e_{v_l} \in L$. Die anderen Fälle ergeben sich analog. ■

3.6.4. Satz. *Die Graverbasis des Gitters L ist die Menge $\pm(M_1 \cup M_2)$ mit*

$$M_1 = \{e_i - e_j : \text{Es gibt einen geraden } (i, j)\text{-Kantenzug in } G\} \setminus \{0\},$$

$$M_2 = \{e_i + e_j : \text{Es gibt einen ungeraden } (i, j)\text{-Kantenzug in } G\}.$$

Beweis. Sei $G = \pm(M_1 \cup M_2)$. Um zu zeigen, dass G die Graverbasis des Gitters L enthält, genügt es zu zeigen, dass es für alle Paare $x, y \in G$ eine Normalform von $x + y$ bezüglich G gibt, die Rest 0 hat. Seien also $x, y \in G$ und $z = x + y$. Wenn x und y disjunkten Träger haben, so ist $x + y = z$ eine Normalform. Wenn x und y denselben Träger haben, so ist $x + y = 0$ oder $x + y = \pm 2e_a$ für ein $a \in \{1, \dots, n\}$. Im letzteren Fall gibt es einen ungeraden (a, a) -Kantenzug in G und es gilt $x + y \in G$. Sei nun $|\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y)| = 1$. Entweder ist $z = x + y$ eine Normalform oder aus Proposition 3.6.3 folgt $x + y \in G$. Aus dem Algorithmus von Pottier folgt, dass die Menge G eine Graverbasis enthält. Da jedoch jedes Element in G auch $\sqsubseteq$ -minimal ist, folgt, dass G die Graverbasis von L ist. ■

3.6.5. Satz. *Die Graverbasis des Ideals J_G ist die Menge $\pm(B_1 \cup B_2)$ mit*

$$B_1 = \{f_{ab} : \text{Es gibt einen geraden } (a, b)\text{-Kantenzug in } G\},$$

$$B_2 = \{g_{ab} : \text{Es gibt einen ungeraden } (a, b)\text{-Kantenzug in } G\}.$$

Beweis. Die Graverbasis von $J_G = \Lambda(I_L)$ ergibt sich nach Proposition 2.11.10 aus der Graverbasis von I_L . ■

3.6.6. Beispiel. Wir betrachten den Graph $G = ([4], \{23, 34\}, \{12\})$ aus Abbildung 3.7. Es gilt $L = \langle e_1 + e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4 \rangle_{\mathbb{Z}}$. Der Algorithmus von Pottier liefert die Graverbasis

$$G = \pm \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Wir betrachten das Ideal $I_G = (g_{12}, f_{23}, f_{34})$. Für die Saturierung von I_G bezüglich $x_1 y_1 \cdots x_4 y_4$ gilt $J_G = I_G : (x_1 y_1 \cdots x_4 y_4)^\infty = (g_{12}, f_{23}, f_{34}, f_{24}, g_{13}, g_{14})$.



Abbildung 3.7: Der Graph G aus Beispiel 3.6.6.

Da die Binome f_{ab} und g_{ab} primitiv in J_G sind, gilt das folgende Korollar.

3.6.7. Korollar. Es gilt genau dann $f_{ab} \in J_G$, wenn es einen geraden (a, b) -Kantenzug in G gibt, und es gilt genau dann $g_{ab} \in J_G$, wenn es einen ungeraden (a, b) -Kantenzug in G gibt. ■

3.6.8. Korollar. Sei G ein zusammenhängender Graph ohne ungerade Kanten. Es gilt also $E_1 = \emptyset$. Sei n die Anzahl der Knoten von G und K_n der vollständige Graph mit Knotenmenge $[n]$. Dann gilt $J_G = I_{K_n}$. ■

3.7. Bipartite Graphen

In diesem Abschnitt wird eine geeignete Verallgemeinerung der Bipartitheit für Graphen mit zwei Sorten von Kanten eingeführt. Diese Definition stimmt mit der klassischen Definition überein, wenn der Graph keine geraden Kanten enthält. Zudem gilt, dass ein Graph, der ausschließlich gerade Kanten besitzt, nach dieser Definition stets bipartit ist. Die vorgestellte Verallgemeinerung geht auf Dr. Philipp Korell zurück.

3.7.1. Definition. Sei $G = (V, E_0, E_1)$ ein Graph und $v \in V$ ein Knoten. Ein (v, v) -Kantenzug heißt *Kreis*.

Da der Graph G keine Schleifen hat, enthält jeder Kreis mindestens zwei verschiedene Knoten.

3.7.2. Definition. Ein Graph $G = (V, E_0, E_1)$ heißt *bipartit*, falls es keine ungerade Kreise in G gibt.

3.7.3. Satz. Sei G bipartit. Dann ist das Ideal I_G radikal.

Beweis. Das folgt aus Satz 3.5.19, denn die Gröbnerbasis von I_G ist quadratfrei, falls G bipartit ist. ■

3.7.4. Proposition. Ein Graph $G = (V, E_0, E_1)$ ist genau dann bipartit, falls es eine Partition $V' \cup V''$ der Knotenmenge V gibt, sodass die folgenden Aussagen gelten:

- (i) Für alle geraden Kanten $e \in E_0$ gilt $e \subseteq V'$ oder $e \subseteq V''$,
- (ii) Für alle ungeraden Kanten $e \in E_1$ gilt $e \not\subseteq V'$ und $e \not\subseteq V''$.

Beweis. Gibt es eine Partition $V = V' \cup V''$ mit den oben genannten Eigenschaften, so enthält jeder Kreis eine gerade Anzahl an ungeraden Kanten. Sei umgekehrt G ein Graph ohne ungeraden Kreis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass G zusammenhängend ist. Seien $a, b \in V$. Dann hat jeder (a, b) -Kantenzug dieselbe Parität. Die Mengen

$$V' = \{b \in V : \text{Es gibt einen geraden } (a, b)\text{-Kantenzug}\},$$

$$V'' = \{b \in V : \text{Es gibt einen ungeraden } (a, b)\text{-Kantenzug}\}$$

liefern eine Partition von V mit den gewünschten Eigenschaften. ■

3.7.5. Bemerkung. Sei $G = (V, E_0, E_1)$ ein Graph ohne gerade Kanten. Es gilt also $E_0 = \emptyset$. In dem Fall ist der Graph G genau dann bipartit im Sinne von Definition 3.7.2, falls der Graph (V, E_1) im herkömmlichen Sinne bipartit ist.

3.7.6. Proposition. Wenn es einen ungeraden Kreis in G gibt, so gilt $x_v^2 - y_v^2 \in J_G$ für alle Knoten $v \in V$, die in derselben Zusammenhangskomponente wie dieser Kreis liegen.

Beweis. Sei C ein ungerader Kreis mit $c \in C$. Sei $v \in V$ in derselben Zusammenhangskomponente wie C . Dann gibt es einen (v, c) -Kantenzug P . Sei $-P$ der (c, v) -Kantenzug, den man durch umgekehrtes Durchlaufen von P erhält. Der Kantenzug $(P, C, (-P))$ ist ungerader (v, v) -Kantenzug. Aus Satz 3.6.5 folgt die Aussage $g_{vv} = x_v^2 - y_v^2 \in J_G$. ■

3.8. Smith-Normalform

Um die Struktur des Gitterideals J_G zu untersuchen, berechnen wir die Smith-Normalform einer Matrix, deren Spalten die Erzeuger des Gitters bilden. Es wird sich zeigen, dass diese dieselbe Form besitzt wie in [Kahle et al., 2016b]. Für den Nachweis ist jedoch ein kleiner Trick erforderlich.

Sei $G = (V, E_0, E_1)$ ein Graph mit Knotenmenge $V = \{1, \dots, n\}$. Sei $E = E_0 \sqcup E_1$ die disjunkte Vereinigung der Kantenmengen E_0 und E_1 . Wir betrachten die Matrix $A_G \in \{0, \pm 1\}^{V \times E}$, die für jede gerade Kante $\{a, b\} \in E_0$ mit $a < b$ eine Spalte $e_a - e_b$, und für jede ungerade Kante $\{c, d\} \in E_1$ mit $c < d$ eine Spalte $e_c + e_d$ hat. Hierbei ist e_i der i -te Einheitsvektor in $\mathbb{Z}^V$. Es gilt $L = \text{im}_{\mathbb{Z}}(A_G)$.

3.8.1. Bemerkung. Falls der Graph G keine geraden Kanten hat, also $E_0 = \emptyset$ gilt, so ist A_G die Inzidenzmatrix des Graphen (V, E_1) . In dem Fall folgt die Smith-Normalform der Matrix A_G aus Satz 2.12.2. Sie ist durch die Anzahl der (bipartiten) Zusammenhangskomponenten des Graphen (V, E_1) bestimmt.

3.8.2. Definition. Sei $\mathcal{C}(G)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten des Graphen G . Sei $\mathcal{N}(G)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von G , die einen ungeraden Kreis enthalten. Sei $\mathcal{B}(G)$ die Menge der bipartiten Zusammenhangskomponenten von G . Außerdem sei $|\mathcal{C}(G)| = c(G)$, $|\mathcal{B}(G)| = c_0(G)$ und $|\mathcal{N}(G)| = c_1(G)$.

3.8.3. Beispiel. Wir betrachten den Graphen $G = ([3], \{12\}, \{13, 23\})$. Es gilt

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir ersetzen die gerade Kante $\{1, 2\}$ durch zwei ungerade Kanten und erhalten den Graph $\tilde{G} = ([4], \emptyset, \{42, 41, 13, 23\})$. Die Graphen G und $\tilde{G}$ sind in Abbildung 3.8 dargestellt. Es gilt $c(G) = c(\tilde{G})$ und $c_1(G) = c_1(\tilde{G})$. Die Matrix $A_{\tilde{G}}$ ist die Inzidenzmatrix des Graphen $([4], \{42, 41, 13, 23\})$. Aus Satz 2.12.2 folgt, dass die Matrix $\text{diag}(1, 1, 1, 0)$ die Smith-Normalform von $A_{\tilde{G}}$ ist. Es gilt

$$A_{\tilde{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_G \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die Matrix $\text{diag}(1, 1, 0)$ die Smith-Normalform von A_G ist.

Abbildung 3.8: Die Graphen G und $\tilde{G}$ aus Beispiel 3.8.3.

3.8.4. Satz. Sei $G = (V, E_0, E_1)$ ein Graph. Dann ist die Smith-Normalform der Matrix A_G gleich der Matrix

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $D = \text{diag}(1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$, $n - c(G)$ die Anzahl der Einsen und $c_1(G)$ die Anzahl der Zweien ist.

Beweis. Sei $m = |E_0|$ die Anzahl der geraden Kanten. Für $m = 0$ folgt die Aussage aus Satz 2.12.2, denn die Matrix A_G ist die Inzidenzmatrix des Graphen (V, E_1) . Sei $m > 0$ und $f = \{a, b\} \in E_0$ eine gerade Kante. Wir konstruieren einen Graphen $\tilde{G}$, indem wir die Kante f durch zwei ungerade Kanten $g_a = \{a, c\}$ und $g_b = \{b, c\}$ ersetzen, wobei $c \notin V$ ein neuer Knoten ist. Es gilt daher $\tilde{G} = (V \cup \{c\}, E_0 \setminus \{f\}, E_1 \cup \{g_a, g_b\})$. Der Graph $\tilde{G}$ erfüllt die Gleichungen $c(G) = c(\tilde{G})$ und $c_1(G) = c_1(\tilde{G})$. Da der Graph $\tilde{G}$ eine gerade Kante weniger als der Graph G hat, folgt analog zu Beispiel 3.8.3 per Induktion

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_G \end{bmatrix} \leftrightarrow A_{\tilde{G}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $D = \text{diag}(1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$, $n + 1 - c(\tilde{G})$ die Anzahl der Einsen und $c_1(\tilde{G})$ die Anzahl der Zweien ist. ■

3.8.5. Satz. Das Ideal J_G ist genau dann prim, wenn der Graph G bipartit ist.

Beweis. Das folgt aus Satz 3.8.4 und Satz 2.9.4. ■

3.8.6. Satz. Sei $\text{char}(K) \neq 2$. Dann ist J_G radikal.

Beweis. Das folgt aus Satz 3.8.4 und Satz 2.10.1. ■

3.9. Minimale Primideale

Don't Panic.

(The Hitchhiker's Guide to the Galaxy)

Im Folgenden sei $\text{char}(K) \neq 2$. Dann ist das Ideal J_G radikal und damit der Schnitt seiner minimalen Primideale. In diesem Abschnitt werden die minimalen Primideale des gemischten Binomkantenideals I_G charakterisiert. Die Herangehensweise entspricht der für parity binomial edge ideals, die in [Kahle et al., 2016b] behandelt werden. Am Ende des Abschnitts wird sich zeigen, dass die bekannten Ergebnisse zu den minimalen Primidealen der binomial edge ideals aus [Herzog et al., 2009] als Spezialfall dieser Theorie enthalten sind.

3.9.1. Definition. Wir definieren die Primideale

$$\mathfrak{p}^+(G) = (x_i + y_i : i \in V(G)), \quad \mathfrak{p}^-(G) = (x_i - y_i : i \in V(G)).$$

3.9.2. Lemma. Es gilt $J_G \subseteq \mathfrak{p}^+(G) \cap \mathfrak{p}^-(G)$.

Beweis. Aus Satz 3.6.5 folgt, dass das Ideal J_G von Polynomen der Form f_{ab} und g_{ab} erzeugt wird. Aus Lemma 3.2.3 folgt $f_{ab}, g_{ab} \in \mathfrak{p}^+(G) \cap \mathfrak{p}^-(G)$ für alle $a, b \in V(G)$. Es gilt also $J_G \subseteq \mathfrak{p}^+(G) \cap \mathfrak{p}^-(G)$. ■

3.9.3. Proposition. Sei G ein zusammenhängender Graph, der einem ungeraden Kreis enthält. Dann gilt die Primärzerlegung $J_G = \mathfrak{p}^+(G) \cap \mathfrak{p}^-(G)$, wobei die Ideale $\mathfrak{p}^+(G)$ und $\mathfrak{p}^-(G)$ die minimalen Primideale des Ideals J_G sind.

Beweis. Sei $V = V(G)$ und $\mathfrak{p} \subset S$ ein Primideal mit $J_G \subseteq \mathfrak{p}$. Angenommen, es gilt $\mathfrak{p}^+ \not\subseteq \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein $a \in V$ mit $x_a + y_a \notin \mathfrak{p}$. Da G zusammenhängend ist und einen ungeraden Kreis enthält, gibt es für jeden Knoten $b \in V$ einen geraden und einen ungeraden (a, b) -Kantenzug. Aus Satz 3.6.5 und Lemma 3.2.4 folgt damit $(x_a + y_a)(x_b - y_b) = g_{ab} - f_{ab} \in J_G$ für alle $b \in V$. Es gilt daher $x_b - y_b \in \mathfrak{p}$ für alle $b \in V$ und damit $\mathfrak{p}^- \subseteq \mathfrak{p}$. ■

3.9.4. Satz. Sei $\mathcal{B}(G) = \{B_1, \dots, B_{c_0(G)}\}$ die Menge der bipartiten Zusammenhangskomponenten von G und sei $\mathcal{N}(G) = \{N_1, \dots, N_{c_1(G)}\}$ die Menge der nichtbipartiten Zusammenhangskomponenten von G . Die Primärzerlegung von J_G ist

$$J_G = \bigcap_{\sigma \in \{+, -\}^{\mathcal{N}(G)}} \sum_{B \in \mathcal{B}(G)} J_B + \sum_{N \in \mathcal{N}(G)} \mathfrak{p}^{\sigma_N}(G).$$

Die in dem Schnitt auftretenden Ideale, sind genau die minimalen Primideale von J_G .

Beweis. Es gilt $J_G = \sum_{i=1}^{c_0} J_{B_i} + \sum_{i=1}^{c_1} J_{N_i}$. Das Ideal J_G ist also die Summe von Idealen in verschiedenen Mengen von Variablen. Da die Primideale J_{B_i} und die minimalen Primideale der Ideale J_{N_i} stabil sind, folgt die Aussage aus Satz 2.13.17. ■

3.9.5. Notation. Sei $S \subseteq V(G)$ eine Teilmenge der Knotenmenge. Wir definieren das Ideal $\mathfrak{m}_S = (x_s, y_s : s \in S)$ und den Graphen $G_S = G[V(G) \setminus S]$.

Es gilt $G_\emptyset = G$. Sei $S \subseteq V(G)$ beliebig. Es gilt stets $I_{G_S} \subseteq I_G \subseteq \mathfrak{m}_S + I_{G_S}$ und das Ideal $\mathfrak{m}_S$ ist ein Primideal.

3.9.6. Proposition. Sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal des Ideals I_G . Dann gibt es eine Teilmenge $S \subseteq V(G)$ und ein minimales Primideal $\mathfrak{p}'$ von J_{G_S} mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}'$.

Beweis. Sei $S = \{v \in V(G) : x_v \in \mathfrak{p} \text{ und } y_v \in \mathfrak{p}\}$. Wir behaupten $J_{G_S} \subseteq \mathfrak{p}$. Sei P ein (a, b) -Kantenzug in G_S und sei $\text{int}(P) = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V(G) \setminus S$. Sei $h = f_{ab}$ oder $h = g_{ab}$ das zu P korrespondierende Binom. Aus Satz 3.3.2 folgt $t_{v_1} \cdots t_{v_r} h \in I_G \subseteq \mathfrak{p}$ für alle $t_{v_i} \in \{x_{v_i}, y_{v_i}\}$ und $i = 1, \dots, r$. Aus $v_i \notin S$ folgt $x_{v_i} \notin \mathfrak{p}$ oder $y_{v_i} \notin \mathfrak{p}$. Es gibt daher eine Kombination der Variablen t_{v_i} mit $t_{v_1} \cdots t_{v_r} \notin \mathfrak{p}$. Es folgt $h \in \mathfrak{p}$. Aus Satz 3.6.5 folgt daraus $J_{G_S} \subseteq \mathfrak{p}$. Es gibt also ein minimales Primideal $\mathfrak{p}'$ von J_{G_S} mit $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. Es gilt $I_G \subseteq \mathfrak{m}_S + J_{G_S} \subseteq \mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. Aus Proposition 2.13.14 folgt, dass $\mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}'$ ein Primideal ist. Aus der Minimalität von $\mathfrak{p}$ folgt also $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}'$. ■

3.9.7. Definition. Sei $s(G) = c_0(G) + c(G) = 2c_0(G) + c_1(G)$. Eine Teilmenge $S \subseteq V(G)$ heißt *Diskonnektor* von G , falls $s(G_S) > s(G_{S \setminus \{v\}})$ für alle $v \in S$ gilt.

Die leere Menge ist stets ein Diskonnektor.

3.9.8. Beispiel. Wir betrachten den Graphen $G = ([4], \{24, 34\}, \{12, 13, 23\})$ aus Abbildung 3.9. Die Menge $S = \{2\}$ ist ein Diskonnektor, denn es gilt $s(G_S) = 2 > 1 = s(G)$. Der Graph G_S hat zwar dieselbe Anzahl Zusammenhangskomponenten wie der Graph G , ist aber bipartit.

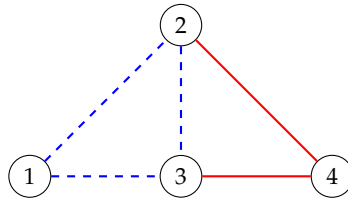


Abbildung 3.9: Der Graph aus Beispiel 3.9.8.

3.9.9. Lemma. Sei $S \subseteq V(G)$ eine Teilmenge und $v \in S$ ein Knoten. Dann gilt die Gleichung $(G_{S \setminus \{v\}})_{\{v\}} = G_S$. ■

3.9.10. Proposition. Sei $S \subseteq V(G)$ ein Diskonnektor und $v \in S$ ein Knoten. Dann ist $\{v\}$ ein Diskonnektor des Graphen $G_{S \setminus \{v\}}$.

Beweis. Es gilt $s((G_{S \setminus \{v\}})_{\{v\}}) = s(G_S) > s(G_{S \setminus \{v\}}) = s(G_{S \setminus \{v\}})_\emptyset$. ■

3.9.11. Proposition. Es gilt genau dann $J_G \subseteq m_S + J_{G_S}$, wenn es für alle (a, b) -Kantenzüge in G mit $a, b \in V(G_S)$ einen (a, b) -Kantenzug in G_S mit derselben Parität gibt.

Beweis. Angenommen, es gilt $J_G \subseteq m_S + J_{G_S}$. Sei P ein (a, b) -Kantenzug in G mit $a, b \notin S$ und $h = f_{ab}$ oder $h = g_{ab}$ das korrespondierende Binom in $K[x_a, x_b, y_a, y_b]$. Es gilt also $h \in m_S + J_{G_S}$. Aus Proposition 2.13.2 folgt $h \in J_{G_S}$. Aus Korollar 3.6.7 folgt, dass es einen (a, b) -Kantenzug in G_S mit derselben Parität gibt. Sei umgekehrt h ein primitives Binom in J_G , das zu einem (a, b) -Kantenzug in G korrespondiert. Falls $a \in S$ oder $b \in S$ gilt, so folgt $h \in m_S$. Andernfalls gilt $a, b \in V(G_S)$ und es folgt $h \in J_{G_S}$ per Voraussetzung. ■

3.9.12. Definition. Ein Knoten $v \in V(G)$ heißt *isoliert*, falls $v \notin e$ für alle Kanten $e \in E_0 \cup E_1$ gilt.

3.9.13. Proposition. Ein Diskonnektor enthält keine isolierten Knoten.

Beweis. Sei $v \in V(G)$ ein isolierter Knoten und $S \subseteq V(G)$ eine Teilmenge mit $v \in S$. Dann gilt $c_0(G_{S \setminus \{v\}}) = c_0(G_S) + 1$ und $c(G_{S \setminus \{v\}}) = c(G_S) + 1$. Es folgt $s(G_{S \setminus \{v\}}) = s(G_S) + 2$. Die Menge S ist also kein Diskonnektor. ■

3.9.14. Proposition. Sei $v \in V(G)$ ein Knoten, der nicht isoliert ist. Dann gilt $c_0(G_{\{v\}}) \geq c_0(G)$ und $c(G_{\{v\}}) \geq c(G)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\{v\}$ ist ein Diskonnektor von G ,
- (ii) $c_0(G_{\{v\}}) > c_0(G)$ oder $c(G_{\{v\}}) > c(G)$,
- (iii) $J_G \not\subseteq m_{\{v\}} + J_{G_{\{v\}}}$.

Beweis. Die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ist klar. Die Äquivalenz (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) folgt aus Proposition 3.9.11. ■

3.9.15. Korollar. Ein Knoten v ist genau dann ein Diskonnektor von G , wenn $J_G \not\subseteq m_{\{v\}} + J_{G_{\{v\}}}$ gilt. ■

3.9.16. Lemma. Seien I, J, K Ideale mit $I \subsetneq J$ und $J \cap K = \emptyset$. Dann gilt $I + K \subsetneq J + K$.

Beweis. Sei $f \in J \setminus I$. Angenommen, es gilt $f = g + h$ für gewisse $g \in I$ und $h \in K$. Dann folgt $f - g = h \in J \cap K$ im Widerspruch zu $J \cap K = \emptyset$. ■

3.9.17. Proposition. Sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal des Ideals I_G . Dann gibt es einen Diskonnektor $S \subseteq V(G)$ und ein minimales Primideal $\mathfrak{p}'$ von J_{G_S} mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}'$.

Beweis. Seien S und $\mathfrak{p}'$ wie in Proposition 3.9.6. Angenommen, die Menge S ist kein Diskonnektor. Dann gibt es einen Knoten $v \in S$ mit $s(G_S) \leq s(G_{S \setminus \{v\}})$. Aus der Formel $(G_{S \setminus \{v\}})_{\{v\}} = G_S$ folgt, dass v kein Diskonnektor des Graphen $G_{S \setminus \{v\}}$ ist. Aus Korollar 3.9.15 folgt $J_{G_{S \setminus \{v\}}} \subseteq \mathfrak{m}_{\{v\}} + J_{G_S} \subseteq \mathfrak{m}_{\{v\}} + \mathfrak{p}'$. Aus Proposition 2.13.14 folgt, dass $\mathfrak{m}_{\{v\}} + \mathfrak{p}'$ ein Primideal ist. Sei $\mathfrak{p}''$ ein minimales Primideal von $J_{G_{S \setminus \{v\}}}$ mit $\mathfrak{p}'' \subseteq \mathfrak{m}_{\{v\}} + \mathfrak{p}'$. Da das Binomideal $\mathfrak{p}''$ kein Monom enthält, ist die Inklusion strikt. Mit Lemma 3.9.16 folgen die Inklusionen

$$I_G \subseteq \mathfrak{m}_{S \setminus \{v\}} + I_{G_{S \setminus \{v\}}} \subseteq \mathfrak{m}_{S \setminus \{v\}} + \mathfrak{p}'' \subsetneq \mathfrak{m}_{S \setminus \{v\}} + \mathfrak{m}_{\{v\}} + \mathfrak{p}' = \mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$$

im Widerspruch zur Minimalität von $\mathfrak{p}$. ■

Nicht alle minimalen Primideale von I_G sind von der Form wie in Proposition 3.9.17, wie das folgende Beispiel zeigt.

3.9.18. Beispiel. Wir betrachten den Graphen aus Abbildung 3.10. Die Menge $S = \{4\}$ ist ein Diskonnektor. Sei $\mathcal{N}(G_S) = \{N_1, N_2\}$. Das Ideal $\mathfrak{p}^+(N_1) + \mathfrak{p}^+(N_2)$ ist ein minimales Primideal von J_{G_S} . Wir betrachten das Primideal

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}^+(N_1) + \mathfrak{p}^+(N_2) = (x_4, y_4, x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_4 + y_4, x_5 + y_5, x_6 + y_6, x_7 + y_7).$$

Es gilt $I_G \subseteq \mathfrak{p}^+(G) \subsetneq \mathfrak{p}$. Das Primideal $\mathfrak{p}$ ist also nicht minimal über I_G . Die Ideale $\mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}^\pm(N_1) + \mathfrak{p}^\mp(N_2)$ sind dagegen minimal über I_G .

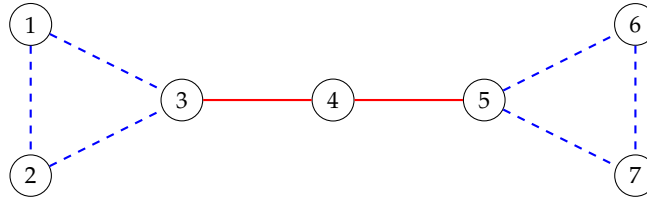


Abbildung 3.10: Der Graph aus Beispiel 3.9.18.

3.9.19. Definition. Sei $S \subseteq V(G)$ eine Teilmenge und $v \in S$. Sei $H \in \mathcal{C}(G_{S \setminus \{v\}})$ die Zusammenhangskomponente des Graphen $G_{S \setminus \{v\}}$ mit $v \in H$. Wir definieren $\mathcal{C}(G_S)_v = \mathcal{C}(H_{\{v\}}) \subseteq \mathcal{C}(G_S)$.

Die Menge $C(G_S)_v$ besteht also aus den Zusammenhangskomponenten des Graphen G_S , die durch Hinzufügen des Knotens v zusammengefügt werden.

3.9.20. Beispiel. Wir betrachten den Graphen G aus Beispiel 3.9.18. Seien $N_1 = (\{1, 2, 3\}, \emptyset, \{12, 13, 23\})$ und $N_2 = (\{5, 6, 7\}, \emptyset, \{56, 57, 67\})$ die Zusammenhangskomponenten des Graphen $G_{\{4\}}$. Es gilt $C(G_{\{4\}})_4 = \{N_1, N_2\}$.

3.9.21. Beispiel. Wir betrachten den Graphen G aus Beispiel 3.9.8. Für den Diskonnektor $S = \{2\}$ gilt $C(G_S)_2 = \{G_S\} = \mathcal{B}(G_S)$.

3.9.22. Lemma. Sei $S \subseteq V(G)$ ein Diskonnektor und $v \in S$. Dann gilt $C(G_S)_v \neq \emptyset$. Enthält die Menge $C(G_S)_v$ nur eine Komponente B , so ist diese bipartit und es gilt $B = N_{\{v\}}$ für eine nichtbipartite Komponente $N \in \mathcal{N}(G_{S \setminus \{v\}})$.

Beweis. Die Menge $\{v\}$ ist ein Diskonnektor des Graphen $G_{S \setminus \{v\}}$. Deshalb ist der Knoten v nicht isoliert in $G_{S \setminus \{v\}}$. Sei $H \in C(G_{S \setminus \{v\}})$ mit $v \in H$. Es folgt $C(G_S)_v = C(H_{\{v\}}) \neq \emptyset$. Die zweite Aussage des Lemmas folgt aus Proposition 3.9.14 (ii). ■

3.9.23. Notation. Sei $S \subseteq V(G)$ eine Teilmenge. Wir schreiben $K[S]$ für den Unterring $K[x_v, y_v : v \in S]$.

Sei zum Beispiel $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal des Gitterideals J_G und sei $N \in \mathcal{N}(G)$ eine nichtbipartite Komponente von G . Dann folgt aus Proposition 2.13.2 und Satz 3.9.4 entweder $\mathfrak{p} \cap K[N] = \mathfrak{p}^+(N)$ oder $\mathfrak{p} \cap K[N] = \mathfrak{p}^-(N)$.

3.9.24. Definition. Sei $S \subseteq V(G)$ ein Diskonnektor und sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal des Gitterideals J_{G_S} . Dann heißt das Primideal $\mathfrak{p}$ *vorzeichenteilend*, wenn für alle Knoten $v \in S$ aus der Aussage $C(G_S)_v = \{N_1, \dots, N_k\} \subseteq \mathcal{N}(G_S)$ stets $\mathfrak{p} \cap K[N_1, \dots, N_k] \neq \mathfrak{p}^\sigma(N_1) + \dots + \mathfrak{p}^\sigma(N_k)$ für alle $\sigma \in \{+, -\}$ folgt.

Ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ von J_{G_S} ist also vorzeichenteilend, wenn für alle Knoten $v \in S$, für die $C(G_S)_v$ keine bipartiten Graphen enthält, nicht alle Summanden von $\mathfrak{p}$, die zu Zusammenhangskomponenten in $C(G_S)_v$ korrespondieren, gleich $\mathfrak{p}^+$ oder gleich $\mathfrak{p}^-$ sind.

3.9.25. Beispiel. Wir betrachten den Graphen G aus Beispiel 3.9.18 und den Diskonnektor $S = \{4\}$. Das minimale Primideal $\mathfrak{p}^+(N_1) + \mathfrak{p}^+(N_2)$ des Gitterideals J_{G_S} ist nicht vorzeichenteilend. Die Primideale $\mathfrak{p}^\pm(N_1) + \mathfrak{p}^\mp(N_2)$ sind dagegen vorzeichenteilend.

Der folgende Satz liefert eine kombinatorische Charakterisierung der minimalen Primideale von I_G .

3.9.26. Satz. Ein Ideal ist genau dann ein minimales Primideal von I_G , wenn es die Form $\mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}$ für einen Diskonnektor $S \subseteq V(G)$ und ein vorzeichenteilendes minimales Primideal von J_{G_S} hat.

3.9.27. Lemma. Seien $S, T \subseteq V(G)$ Diskonnektoren und seien $J_{G_S} \subseteq \mathfrak{p}$ und $J_{G_T} \subseteq \mathfrak{p}'$ minimale Primideale von J_{G_S} und J_{G_T} . Dann folgt aus der strikten Inklusion $\mathfrak{m}_T + \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}$ stets die strikte Inklusion $T \subsetneq S$.

Beweis. Es ist klar, dass $T \subseteq S$ gilt. Angenommen, es gilt $T = S$. Es gilt $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \subseteq K[G_S]$ und damit $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. Es folgt $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ im Widerspruch zur Annahme. ■

3.9.28. Lemma. Seien $a, b \in V(G)$ mit $a \neq b$. Es gilt $g_{ab} \notin (x_a + y_a, x_b - y_b)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{p} = (x_a + y_a, x_b - y_b)$. Die Menge $\{x_a + y_a, x_b - y_b\}$ ist eine Gröbnerbasis von $\mathfrak{p}$ und es gilt $g_{ab} = x_b(x_a + y_a) - y_a(x_b - y_b) - 2y_a y_b$. ■

Beweis von Satz 3.9.26. Aus Proposition 3.9.17 folgt, dass jedes minimale Primideal von I_G die Form $\mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}$ für einen Diskonnektor $S \subseteq V(G)$ hat. Wir behaupten, dass in diesem Fall das Primideal $\mathfrak{p}$ vorzeichenteilend ist. Angenommen, $\mathfrak{p}$ ist nicht vorzeichenteilend. Dann gibt es einen Knoten $v \in S$ mit $C(G_S)_v = \{N_1, \dots, N_k\} \subseteq \mathcal{N}(G_S)$ und ein $\sigma \in \{+, -\}$ mit

$$\mathfrak{p} \cap K[N_1, \dots, N_k] = \mathfrak{p}^\sigma(N_1) + \dots + \mathfrak{p}^\sigma(N_k).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei σ gleich $+$. Sei H die Zusammenhangskomponente von $G_{S \setminus \{v\}}$ mit $v \in H$. Es gilt daher die Gleichung $C(G_S)_v = C(H_{\{v\}})$ und die Inklusion

$$\mathfrak{p}^+(H) = (x_v + y_v) + \sum_{i=1}^k \mathfrak{p}^+(N_i) \subsetneq \mathfrak{m}_{\{v\}} + \sum_{i=1}^k \mathfrak{p}^+(N_i).$$

Die verbleibenden Zusammenhangskomponenten von G_S stimmen mit den verbleibenden Zusammenhangskomponenten von $G_{S \setminus \{v\}}$ überein. Das heißt $C(G_S) \setminus \{N_1, \dots, N_k\} = C(G_{S \setminus \{v\}}) \setminus \{H\}$. Deshalb erhält man ein Primideal über I_G , das strikt kleiner ist. Das Ideal $\mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}$ ist also nicht minimal über I_G im Widerspruch zur Annahme.

Sei umgekehrt $S \subseteq V(G)$ ein Diskonnektor und $\mathfrak{p}$ ein vorzeichenteilendes minimales Primideal von J_{G_S} . Angenommen, das Primideal $\mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}$ ist nicht minimal über I_G . Dann gibt es einen Diskonnektor $T \subseteq V(G)$ und ein minimales Primideal $\mathfrak{p}'$ von J_{G_T} mit

$$(3.9.29) \quad I_G \subseteq \mathfrak{m}_T + \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}.$$

Aus Lemma 3.9.27 folgt $T \subsetneq S$. Es folgt $G_S \subsetneq G_{S \setminus \{v\}} \subseteq G_T$ und damit auch die Inklusionen $J_{G_S} \subsetneq J_{G_{S \setminus \{v\}}} \subseteq J_{G_T}$. Wir betrachten die Menge $C(G_S)_v$ und unterscheiden zwei Fälle.

- (i) Angenommen, die Menge $C(G_S)_v$ enthält eine bipartite Komponente B . Aus Proposition 3.9.14 (ii) folgt, dass zwei Fälle auftreten können.

Angenommen, B wird durch Hinzufügen des Knoten v nichtbipartit. Dann gibt es einen Knoten $a \in V(B)$ mit $x_a^2 - y_a^2 \in J_{G_{S \setminus \{v\}}} \subseteq J_{G_T} \subseteq \mathfrak{p}'$, aber $x_a^2 - y_a^2 \notin J_B$. Da $\mathfrak{p} \cap K[B] = J_B$ und $a \notin S$ gilt, folgt $x_a^2 - y_a^2 \notin \mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}$ im Widerspruch zu (3.9.29).

Angenommen, B wird durch Hinzufügen des Knoten v mit einer anderen bipartiten Komponente B' verbunden. Dann gibt es Knoten $a \in V(B)$ und $b \in V(B')$ sowie ein Binom $h \in K[\{a, b\}]$ mit $h \notin J_B + J_{B'}$ und damit auch $h \notin \mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}$, aber $h \in J_{G_{S \setminus \{v\}}} \subseteq \mathfrak{p}'$ im Widerspruch zu (3.9.29).

- (ii) Angenommen, alle Komponenten in $C(G_S)_v$ sind nichtbipartit. Aus Proposition 3.9.14 (ii) folgt, dass es mindestens zwei solche Komponenten gibt. Da $\mathfrak{p}$ vorzeichenteilend ist, gibt es Komponenten $N_1, N_2 \in C(G_S)_v$ mit $\mathfrak{p}^+(N_1), \mathfrak{p}^-(N_2) \subseteq \mathfrak{p}$. Es gibt einen ungeraden (a, b) -Kantenzug in $G_{S \setminus \{v\}}$ mit $a \in V(N_1)$ und $b \in V(N_2)$. Es folgt $g_{ab} \in J_{G_{S \setminus \{v\}}} \subseteq \mathfrak{p}'$. Aus Lemma 3.9.28 folgt $g_{ab} \notin \mathfrak{p}^+(N_1) + \mathfrak{p}^-(N_2)$ und damit $g_{ab} \notin \mathfrak{p}$. Aus $a, b \notin S$ folgt $g_{ab} \notin \mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}$ im Widerspruch zu (3.9.29). ■

Im Folgenden setzen wir $E_1 = \emptyset$. Wie bereits erwähnt, entspricht das gemischte Binomkantenideal I_G dem binomial edge ideal des Graphen $G = ([n], E_0)$. Da G keine ungeraden Kanten enthält, existiert in G kein ungerader Kreis. Folglich ist G gemäß Definition 3.7.2 bipartit. Des Weiteren liefert Korollar 3.6.8 eine Beschreibung der Saturierung von binomial edge ideals. Damit ergibt sich Korollar 3.9 aus [Herzog et al., 2018] als Spezialfall von Satz 3.9.26.

3.9.30. Korollar. *Sei $E_1 = \emptyset$. Ein Ideal ist genau dann ein minimales Primideal des binomial edge ideals I_G , wenn es die Form $\mathfrak{m}_S + J_{G_S}$ für einen Diskonnektor $S \subseteq V(G)$ hat. Eine Menge $S \subseteq V(G)$ ist genau dann ein Diskonnektor, wenn $S = \emptyset$ oder $c(G_S) > c(G_{S \setminus \{v\}})$ für alle $v \in S$ gilt.* ■

3.9.31. Beispiel. Wir betrachten den Graphen

$$G = ([6], \{12, 13, 23, 24, 15, 34, 35, 36, 46, 56\}, \emptyset)$$

aus Abbildung 3.11. Ein Diskonnektor von G ist eine Menge von Knoten $S \subseteq V(G)$ mit der Eigenschaft $c(G_S) > c(G_{S \setminus \{v\}})$ für alle $v \in S$.

Neben der leeren Menge hat der Graph G die folgenden Diskonnektoren:

$$S_1 = \{1, 3, 4\}, S_2 = \{1, 3, 6\}, S_3 = \{2, 3, 5\}, S_4 = \{2, 3, 6\}, S_5 = \{3, 4, 5\}.$$

Die minimalen Primideale des binomial edge ideals I_G sind somit

$$J_G, \mathfrak{m}_{S_1} + (f_{56}), \mathfrak{m}_{S_2} + (f_{24}), \mathfrak{m}_{S_3} + (f_{46}), \mathfrak{m}_{S_4} + (f_{15}), \mathfrak{m}_{S_5} + (f_{12}).$$

Es gilt $J_G = K_6$, wobei K_6 der vollständige Graph mit Knotenmenge $[6]$ ist.

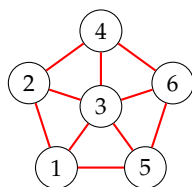


Abbildung 3.11: Der Graph aus Beispiel 3.9.31.

Kapitel 4

Fazit

Diese Arbeit zeigt, dass gemischte Binomkantenideale eine natürliche Verallgemeinerung von binomial edge ideals und parity binomial edge ideals darstellen. Die Herleitung der reduzierten Gröbnerbasis und der minimalen Primideale folgt denselben Prinzipien wie im Fall der parity binomial edge ideals. Gleichzeitig enthalten die gewonnenen Aussagen diejenigen zu binomial edge ideals als Spezialfall. Damit bieten gemischte Binomkantenideale eine geeignete Erweiterung beider Konzepte.

Offen bleibt die Frage, welche weiteren algebraischen und kombinatorischen Eigenschaften sich auf gemischte Binomkantenideale übertragen lassen. In der Literatur sind zahlreiche Resultate zu freien Auflösungen, zur Regularität, zur Cohen-Macaulay-Eigenschaft und zu anderen homologischen Invarianten von binomial edge ideals bekannt. Es wäre interessant zu untersuchen, inwiefern diese Ergebnisse auch für die verallgemeinerte Klasse der gemischten Binomkantenideale gelten.

Ein weiterer vielversprechender Forschungsansatz betrifft closed graphs. Für binomial edge ideals sind dies genau jene Graphen, deren Erzeuger bereits eine Gröbnerbasis bilden. Welche Rolle die Eigenschaft closed für Graphen mit zwei Sorten von Kanten spielt und welche strukturellen Eigenschaften sich in diesem Fall erhalten, ist eine offene Frage, die weiter untersucht werden könnte.

Literaturverzeichnis

- [Artin, 2013] Artin, M. (2013). *Algebra*. Pearson Deutschland.
- [Atiyah and MacDonald, 1994] Atiyah, M. and MacDonald, I. (1994). *Introduction To Commutative Algebra*. Addison-Wesley series in mathematics. Avalon Publishing.
- [Bosch et al., 2013] Bosch, S. et al. (2013). *Algebraic geometry and commutative algebra*. Springer.
- [Cox et al., 1997] Cox, D., Little, J., O’shea, D., and Sweedler, M. (1997). *Ideals, varieties, and algorithms*, volume 3. Springer.
- [darij grinberg, 2011] darij grinberg (2011). Is the sum of two prime ideals in different polynomial rings $k[x_i]$ and $k[y_i]$ a prime ideal in $k[x_i, y_i]$? Available at <https://mathoverflow.net/q/76772>, accessed February 3, 2025.
- [De Loera et al., 2012] De Loera, J. A., Hemmecke, R., and Köppe, M. (2012). *Algebraic and geometric ideas in the theory of discrete optimization*. SIAM.
- [Ene and Herzog, 2011] Ene, V. and Herzog, J. (2011). *Grobner bases in commutative algebra*, volume 130. American Mathematical Soc.
- [Gilmer, 1984] Gilmer, R. (1984). *Commutative semigroup rings*.
- [Grossman et al., 1995] Grossman, J. W., Kulkarni, D. M., and Schochetman, I. E. (1995). On the minors of an incidence matrix and its smith normal form. *Linear Algebra and its Applications*, 218:213–224.
- [Herzog et al., 2009] Herzog, J., Hibi, T., Hreinsdottir, F., Kahle, T., and Rauh, J. (2009). Binomial edge ideals and conditional independence statements.
- [Herzog et al., 2018] Herzog, J., Hibi, T., and Ohsugi, H. (2018). *Binomial ideals*, volume 279. Springer.

- [Kahle and Korell, 2022] Kahle, T. and Korell, P. (2022). Mixed binomials edge ideals. Unveröffentlichtes Manuskript.
- [Kahle et al., 2016a] Kahle, T., Miller, E., and O’Neill, C. (2016a). Irreducible decomposition of binomial ideals. *Compositio Mathematica*, 152(6):1319–1332.
- [Kahle et al., 2016b] Kahle, T., Sarmiento, C., and Windisch, T. (2016b). Parity binomial edge ideals. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 44:99–117.
- [Matusevich and Ojeda, 2018] Matusevich, L. F. and Ojeda, I. (2018). *Binomial Ideals and Congruences on $\mathbb{N}^n$* , page 429–454. Springer International Publishing.
- [Milne, 2024] Milne, J. S. (2024). Algebraic geometry (v6.1). Available at www.jmilne.org/math/.
- [Ohtani, 2009] Ohtani, M. (2009). Graphs and ideals generated by some 2-minors.
- [Windisch, 2016] Windisch, T. (2016). *Fiber graphs*. PhD thesis, Universitätsbibliothek.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Magdeburg, den 20. Februar 2025